GUILELMI OUGHTRED

ÆTONENSIS,

Quondam Collegii Regalis in CANTABRIGIA Socii,

CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA,

Sive potius

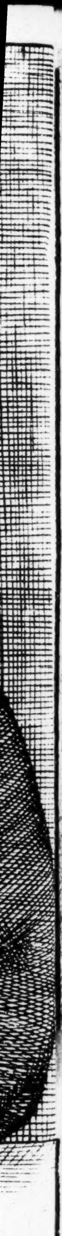
FABRICATA.

Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus, quæ in sequenti pagina recensentur.

Editio Quinta auctior & emendatior.

OXONIÆ,
Excudebat *LEON. LICHFIELD.*
Anno Dom. M DC XC III.

GULIELMUS OUGHTRED *Anglus* ex
Academia *Cantabrigiensi* An.° Ætat. 73. 1646.



ex

16.

GUILELMI OUGHTRED

ÆTONENSIS,

Quondam Collegii Regalis in
CANTABRIGIA Socii,

CLAVIS MATHEMATICÆ
DENUO LIMATA,
Sive potius
FABRICATA.

Cum aliis quibuſdam ejuſdem Commentationibus, quæ in ſequenti pagina recenſentur.

Editio Quinta auctior & emendatior.

OXONIÆ,
Excudebat *LEON. LICHFIELD.*
Anno Dom. M DC XC III.

Tractatus, qui ſequuntur, hi ſunt.

I. *Clavis Mathematicæ.*

II. *Æquationum Affectarum Reſolutio: ubi etiam multa de Logarithmorum uſu interſeruntur.*

III. *Elementi Decimi Euclidis Declaratio.*

IV. *De Solidis Regularibus Tractatus.*

V. *De Anatociſmo.*

VI. *Regula Falſi, Demonſtrata.*

VII. *Theorematum Archimedis, de Sphæra & Cylindro, Declaratio.*

VIII. *Horologiographia Geometrica.*

Erudito Juveni

D. *THOMÆ COOK*,

Ex Agro

DERBIENSI

ARMIGERO;

E *Collegio - Novo Oxoniæ*,

Superioris Ordinis

COMMENSALI;

Animi, Corporis, & Fortunæ

Dotibus Ornato;

Peregre Domique

RES MATHEMATICAS

Aliamque Literaturam edocto;

HANC

D. OUGHTREDI Clavis

Editionem, ex ſuo Typographéo

Prodeuntem,

Honoris & Obſervantiæ gratia,

D. D. D.

LEONARDUS LICHFIELD.

Ad Lectorem Præfatio, ab ipso OUGHTREDO *(tum vivo) Editioni Tertiæ præfixa.*

CONſcripſi olim in Familia illuſtriſſimi nuper Comitis *Arundeliæ* & *Surriæ*, cum ex filiis ejus alteri in diſciplinis Mathematicis exponendis deſervierim, ordinem quendam, qui mihi ad myſteria Mathematica videbatur appoſitiſſimus, ut ſtudioſorum, qui ipſum ſecuturi ſunt, animi ſcientiis illis, non leviter & ſuperficie tenùs tingantur, ſed intimè & radicitùs imbuantur. Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum, maximè verò nobiliſſimi illius eruditiſſimìque D^ni^ *Caroli Cavendiſh* hortatu, in publicum ſub titulo *CLAVIS MATHEMATICÆ* primò emiſi. Tractatus quidem ille, non methodo (ſicut vulgò fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata longo verborum ambitu deſcriptus, ſed via inventionis Analytica, (ita ut totus ſit quaſi demonſtratio continua nexibus firmiſſimis compaginata) & non tam verbis quàm rerum ſpeciebus depictus, primo adſpectu difficultatem peperit in multis, qui forma tradendi inuſitata territi, Chimæram aut Sphyngem aliquam imaginabantur: Verùm ſiquis, præ-

judicii hæc terriculamenta adſpernatus, attente præſentique animo hanc viam ingrediatur, rem videbit maximè facilem & conſpicuam. Nam ſpecioſus hic atque ſymbolicus modus, nec memoriam verborum multiplicitate torquet, nec phantaſiam rerum multarum comparatione atque dijudicatione onerat ac diſtrahit; ſed operationis atque argumentationis totius proceſſum conſpectui repræſentans: Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, ſed omnium, quotquot ſunt ubique terrarum, nationum linguis (modò de notis conſtet) efferendum.

Animi quidem mei ſenſus & votum, tum in prima Clavis meæ formatione, tum in ſecunda limatione, ſive potius nova fabricatione, fuit, ut Matheſeos ſtudioſis quaſi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum ſcientiarum adyta deducantur, & ad optimos antiquiſſimóſque Authores *Euclidem*, *Archimedem*, *Apollonium Pergæum* magnum illum Geometram, *Diophantum*, ac reliquos, facilius penitiuſque intelligendos dirigantur; eorumque non propoſitiones modo addiſcant, quod pleriſque Mathematicis ſcientiæ quaſi culmen eſt & faſtigium; Sed etiam percipiant qua ſolertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, converſionum atque diſquiſitionum moliminibus priſci illi heroes ſcientiam hanc pulcherrimam ornaverint, auxerint, invenerint.

Mihi

Mihi quidem in illis legendis verſanti, & demonſtrationes ingenioſiſſimas ex incogitatis & inexpectatis, ſed divino quodam artificio conquiſitis, principiis adeò affabrè concinnatas animadvertenti admirantique ſtupor incidit, unde tanta exiſteret imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, faceréque ut tot res, tam longe diſſitæ, animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coëant atque conſidant.

Quapropter ut ipſas res clariùs intuerer propoſitiones & demonſtrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantùm ſymbolis ac notis, oculis etiam ipſis uno obtutu perſpiciendas deſignavi. Tum Theorematum affectiones varias in æqualitate, proportione, affinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæſtiones conſimiles problematicè fingendo, eaſque quaſi jam confectas, via Analytica in ſua principia reſolvendo, rationes ac media, quibus conſtruantur inveſtigavi. Hinc tandem (non niſi plurimorum annorum uſu atque experientia) præceptorum illa qualiſcunque ſeges emerſit.

Non erat mihi animus, jam ad extremam ſenectutem appropinquanti, poſt *primam* hujuſce Clavis Editionem, in hanc iterum arenam prodiiſſe. Sed Venerabilis Vir Dn. *Sethus Ward*, Collegii Sidneienſis in Academia Cantabrigienſi tum Socius, nunc in Oxonienſi

Professor Astronomiæ Savilianus, Vir prudens, pius, ingenuus, nec Mathesi solùm, sed & omni politioris literaturæ genere cultissimus, (qui primus Cantabrigiæ Clavis meæ usum exposuit,) mei videndi & cognoscendi desiderio, domi me latitantem longo itinere perquisivit; cujus importuno hortatui, ut libellum illum sub *secunda* lima correctiorem auctiorémque quorundam, ex multis quæ apud me erant, adjectione ederem, resistendi facultas non erat. Accessit & alter hortator vehemens Dn. *Carolus Scarbrough* Doctor Medicinæ, suavissimis moribus, perspicacissimóque ingenio Vir, cujus tanta est in Mathesi solertia, & supra fidem fælix tenaxque memoria, ut omnes Euclidis, Archimedis, aliorúmque nonnullorum ex antiquis propositiones & demonstrationes recitare ordine & in usum proferre potis sit. Horum ego duorum judicio de meis lubens acquiesco. Ii enim sunt quos celeberrimæ totius Europæ Academiæ, Mathematicarum aliarúmque artium humaniorum Professores meritò amplexentur.

Quod autem a mendis illis Typographicis, quibus priores nimium scatebant, repurgata hæc *tertia* editio exhibeatur (quod in hujusmodi scriptis maximi sit momenti) curæ illud debetur Venerabilis Viri Dn. *Joannis Wallis*, Collegii Emanuëlensis Cantabrigiæ non ita pridem Alumni; deinde Collegii Reginalis ibidem Socii; nunc apud Oxonienses Geometriæ Professoris Saviliani; Viri ingenui, pii, in-

induſtrii, in omni reconditiore literatura verſatiſſimi, in rebus Mathematicis admodum perſpicacis, & in enodatione explicationeque Scriptorum intricatiſſimis *Zipherarum* involucris occultatorum (quod ingenii ſubtiliſſimi argumentum eſt) ad miraculum fœlicis. Huic enim ille editioni adornandæ ultrò ſe offerens, & Calculi maximam partem examinavit, & operas perpetuo auxilio, atque aſſidua inſpectione adjuvit.

Denique non ſine piaculo omittam amantiſſimum mei Dn. *Robertum Wood* Collegii Lincolnienſis Socium, Philoſophiæ atque Medicinæ ſtudioſum, Virum optimum atque doctiſſimum, qui non calamo ſolùm & ſcriptorum examinatione, nequid fortè mihi in computationibus erroris exciderit, amicum præſtitit officium, ſed etiam bene maximam horum partem Anglicè non ita pridem edendam tranſtulit.

Partem autem illam quæ Geometricam Horologiorum Sciotericorum rationem tradit, ex Anglico idiomate in Latinum vertit Dn. *Chriſtophorus Wren*, Collegii Wadhamenſis Commenſalis Generoſus, Admirandi prorſus ingenio Juvenis, qui nondum ſexdecim annos natus, Aſtronomiam, Gnomonicam, Staticam, Mechanicam præclaris inventis auxit, ab eoque tempore continuo augere pergit; & revera is eſt à quo magna poſſumus (neque fruſtra) propediem exſpectare.

Huic

Huic Clavi Mathematicæ, poſt primam editionem, accedit, I, Affectarum quovis modo Æquationum in numeris luculenta reſolutio. II, Elementi Euclidis Decimi declaratio. III, Elementorum Euclidis Decimi tertii & Decimi quarti de Solidis Regularibus illuſtratio. IV, Sex Theorematum fundamentalium circa Anatociſmum inventio. V, Regulæ falſæ poſitionis demonſtratio Analytica. VI, Theorematum Archimedis de Sphæra & Cylindro declaratio. VII, Horologia Scioterica in Plano, Geometrica delineandi Methodus. Ultimò, inveniet etiam hîc lector Logiſticæ decimalis (quam præ ſexagenaria illa Mathematices ſtudioſis, præſertim in computationibus Aſtronomicis, commendatam eſſe cupio) regulas breves interſertas: una cum Multiplicationis & Diviſionis contractione admodum neceſſaria: Et Logarithmorum uſum, quantum ſatis eſt.

Horum ego pleraque cum ante plurimos annos, in gratiam & uſum nobiliſſimi eruditiſſimiſque Domini *Gerardi* Domini *Aungier* Baronis de *Longford*, hominis vere pii atque Chriſtiani, doctique non modò ſermonis utriuſque linguæ, ſed & Hebraicæ aliarúmque linguarum Orientalium, ac utriuſque philoſophiæ, & de me optimè meriti, ſcripſerim; jure eum ſuo reticendo fraudare pro piaculo duxerim. Is enim eſt, quo fautore atque Mœcenate gloriari pro ſummo honore habeam.

I. CLA-

Index Capitum.

I. CLAVIS MATHEMATICÆ.

II. De

III. Horologiographia Geometrica.

CLAVIS

VIII

VIII. Horologiographia Geometrica.

CLAVIS

CLAVIS MATHEMATICÆ
Denuo Limata.

CAP. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; ſed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

Integri.				Partes.			
9	8 7 6	5 4 3	2 1 0	$\overline{1}$ $\overline{2}$	$\overline{3}$ $\overline{4}$ $\overline{5}$	$\overline{6}$ $\overline{7}$ $\overline{8}$	$\overline{9}$, &c.
M	MMM	MMM	CXI	XC	MMM	MMM	M
M	MMM	C X I			I X C	MMM	M
M	C X I					I X C	M

2. In hâc tabellâ numeri ſuperiores ſunt Indices ſive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium; affirmativi in integris, negativi in partibus. Eſtque progreſſio in decuplâ ratione verſus ſiniſtram, & in ſubdecupla verſus dextram; ſicut literæ numerales ſubſcriptæ oſtendunt.

Eſt igitur progreſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni alia Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt apponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis, multo facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad 1 cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fieret.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò *ſeparatrix* dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut 0|5 ſunt 5 decimæ partes: 0|56 ſunt 56 centeſimæ partes: 0|056 ſunt 56 milleſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Cir-

7. Circuli ante integros, vel post partes decimales, nihil valent: at verò post integros, & ante partes decimales (hoc est, utrinque lineæ separatrici proximi) vim suam retinent: nam gradus constituunt quibus figurarum valores censentur: ut 0005, significant tantummodo 5: & 0|500, 5 sunt decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus scribendis, linea separatrix semper apponatur; & loci, si qui sunt, vacui, circulis suppleantur: ut 0|00005 sunt 5 centies millesimæ partes.

9. Signum addendi sive affirmationis est + plus, sive pl. ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi sive negationis est — minus, sive mi: ut — 34, negantur omnino esse.

11. Pertinet autem signum ad magnitudinem sequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non est præfixum signum negationis, intelligitur esse affirmata, & habere signum +, licet non sit expressum.

12. Et nota quod signis + & -- utor, quando simplex magnitudo affirmatur vel negatur de simplice: signis autem pl. & mi. quando magnitudo composita affirmatur vel negatur de simplice, vel simplex de composita.

13. Magnitudines denotari possunt vel numeris mensuram ipsarum significantibus, vel etiam speciebus: ut linea longa septem uncias, designatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per

duas literas terminis lineæ adſcriptas, AB, BC, CD, &c. pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine ſpecies quælibet ſtatuitur.

14. Specioſa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex ſumptione quæſiti, tanquam noti, inveſtigatur quæſitum) multo accommodatior eſt, quam illa numeroſa. Nam in numeroſâ, numeri à novo, quem proferunt, ita abſorbentur, ut penitus diſpareant, nec ullum ſui veſtigium relinquant: At in ſpecioſâ, permanent ſpecies ſine aliquâ mutatione, ſpecimen exhibentes totius operationis: unde non ſolum in quæſiti notitiam ducunt, ſed etiam Theorema generale pro ſolutione conſimilium quæſtionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

CAP. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregratum. Ut 3 & 7 conſtituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & ſummas ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati ſimul æquantur Summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

		l.	s.	d.
79403	3794|236	17	13	4
8956	584|3	9	16	7
67293	947|08	238	09	6
5087	4720|7439	70	00	10
160739	48|5	48	10	3
	10094|8599	384	10	6

4. Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas ſervatis ſignis.

ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	--A	---3A	---5A	E
Sūma	3A+A	A-A	5A-3A	3A-5A	A+E
hoc eſt	4A	o	2A	--2A	

ad	A+B	A+B
adde	A-B	A-C
Summa	2A	2A+B--C

Sic in Indicum Additione. $\left\{ \begin{array}{c|c} 3 & \bar{3} \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & \bar{1} \end{array} \right.$

CAP. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Exceſſus. Ut è 7 tolle 3, reſtat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Subductione, numerus subducendus, unà cum differentia, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

		l.	s.	d.
347206836	3794¦236	17	13	4
6807592	947¦c8	9	16	7
340399244	2847¦156	7	16	9

4. Subductio *speciosa* conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis magnitudinis subducendæ.

Ex	4A	3 A	5 A	A
tolle	A	5 A	-3 A	E
Restat	4 A--A	3A--5 A	5 A + 3A	A--E
hoc est	3 A	--2 A	8 A	

Ex	A	A	Sic in Indicum subductione. 3¦3, 2¦2, 5¦5
tolle	B+C	B-C	
Restat	A-B-C	A-B + C	

CAP. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus; vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propositis habetur pro longitudine, alter

alter pro latitudine: & numeri propositi dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum potestas, est figura ex ipsis composita, cujus anguli sunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & singulas figuras unius numeri dati, in singulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam summam colligit. Et si partes decimales numeris propositis sint admixtæ, è toto facto tot locos linea separatrice abscindit, quot sunt loci partium in utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis. Sic 58|73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, est 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58|73 est $\bar{2}$. addantur Indices 2 & $\bar{2}$, extabit o pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et consimilis reliquarum figurarum in facto censura gradualis institui poterit.

3. Si è numeris propositis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum Multiplicatio: & facto demum tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sint omissi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione est, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut si ducatur 4 in 6 fiet 24: Est igitur 1. 4 :: 6. 24: vel 1. 6 :: 4. 24. Ex-

Exempla Multiplicationis.

4576	580|34
892	47|5
9152	290170
41184	406238
36608	232136
4081792	27566|150

358	58|73
600	600
214800	35238

5. Contractio Multiplicationis, in Logiſtica valdè ùtilis, ſic eſt. Si inſtituto tuo ſufficiat habere factum non integrum, ſed multatum aliquot ex ultimis figuris: ſtatues unitatis locum minoris numeri, ſub illa figura majoris, cujus Index æqualis ſit numero figurarum, vel abſcindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, ſub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ eſt ſupra eam figuram minoris, qua multiplicatur: habita tamen ratione incrementi, quod ex ſubſequentibus figuris majoris numeri ſuppeditatur. Hujus compendii caſus ſunt quatuor.

Caſus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris ſub uni-

unitatis loco majoris. Ut in exemplo, ubi 246|914 ductus in 35|27 producit 8708 integros, abſciſſis omnibus partibus decimalibus.

246|914
72|53
7407
1235
49
17
8708

Caſus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium, puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri ſub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

246|914
72|53
74074200
12345700
493828
172840
8708|6568

Caſus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: ſtatues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 ſinus graduum 54 multiplicandus eſt per 39875 ſinum maximæ declinationis 23° 30': prodibit 32260 ſinus declinationis ſolis ad ♉ 24°.

80902
57893
24271
7281
647
57
4
32260

Casus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia $5-4=1$: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo ubi sinus 42262 multiplicatur per 0|0064, ita ut abscissis à facto quinque figuris ultimis, restituantur quatuor loci partium: Factus erit 0|0027.

$$\begin{array}{r} 42262 \\ 4600|0 \\ \hline 25 \\ 2 \\ \hline 0|0027 \end{array}$$

6. Multiplicatio *speciosa* connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ *in* vel ×: vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica litera. Et, si signa sint similia, producta magnitudo erit affirmata: sin diversa, negata. Effertur autem per *in*.

Et nota, quòd A in A, sive A×A, sive A A, est Aq. AAA sive AqA, est Ac. AAAA, sive AqAq, sive AcA, est Aqq. AAAAA, sive AcAq, sive AqqA, est Aqc. AAAAAA, sive AcAc, sive AqqAq, sive AqcA, est Acc, &c. Nam potestas quælibet superior fit ex duabus inferioribus, quarum dimensiones simul æquantur numero dimensionum superioris. Quot autem magnitudines sunt quæ multiplicantur, totidem sunt dimensiones.

Duc A	A+E	A—E	A+E+I	B+1
in E	B	B	Z	A
fiet AE	BA+BE	BA-BE	ZA+ZE+ZI	AB+A

Duc

Duc	$3A$	AE	AE	$A+E$	$A+E$
in	$2A$	A	AE	$A+E$	$A-E$
fiet	$6Aq$	AqE	$AqEq$	$Aq+AE$	$Aq+AE$
				$+AE+Eq$	$-AE$
				$Aq+2AE+Eq$	$-Eq$
					$Aq-Eq$

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet ſi magnitudines conſtent binis literis. Ut ſi latus $AB+CD$ multiplicandum ſit in ſe, producetur quadratum $ABq+2AB\times CD+CDq$.

CAP. V. *De Diviſione.*

1. NUmerus inventus per Diviſionem dicitur Quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex applicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et ſi numerus ad numerum applicetur cum lineolâ interjectâ, oſtendit quod numerus ille ſuperior dividendus ſit per inferiorem, ad quem applicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{1}{2}$.

2. Diviſio incipit ad ſiniſtram: & poſtquam ex dividendo ſufficientem diviſori dividuum diſtinxerit, &ſub ipſo diviſorem ſubſcripſerit, vel ſaltem ſubſcriptum cogitaverit: ſingulas figuras diviſoris ex ſingulis ipſius dividui figuris ſupra ſtantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum diviſore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, diviſorem in locum proximè ſequentem promovet, novamque uti prius diviſionem inſtituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem quotus particularis inventus,

ejusdem debet esse loci, sive gradus, cujus est figura dividendi, quæ stat, vel cogitatur stare supra unitatis locum divisoris. Nam in Divisione, Index cujusque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ divisæ. Sic 171|4 divisus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 est 1; & Index primæ figuræ divisoris 8 est 2: Tollatur 2 ex 1, restabit $\bar{1}$ pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et si divisor adjunctos sibi habeat ad dextram circulos: omissis circulis, & abscissis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat divisio. In fine autem divisionis restituendi sunt, tum omissi circuli tum figuræ abscissæ.

4. In Divisione est, ut Divisor ad unitatem, sic Dividuus ad Quotum: vel ut Dividuus ad Divisorem, sic Quotus ad Unitatem. Ut diviso 24 per 6, quotus erit 4: Est igitur 6. 1 :: 24. 4: Item 24. 6:: 4. 1.

5. Si magnitudo facta sit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipsam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Divisione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod Multiplicatio conficit, Divisio dissolvit. Quare in applicatione magnitudinis ad magnitudinem, si eadem magnitudo sit tum supra lineam, tum infra, expungatur utrobique. Ex-

Exempla Divisionis.

187135075 ($630084\frac{127}{297}$
297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6|000) 4320|765 (720|1275

12
8921317
297) 187135075 ($630084\frac{127}{297}$
178213768
892118
2901
435287
580|34) 27566150 (47|5
23213680
406237
2901

8. Ali-

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum: deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorem minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris: ut si dividantur 467023 per numerũ infinitum 357|0926425, Quotus erit 1307|80 ferè.

```
                  17
                 303
                1803
               100930
357|0926425)  467023 (1307|80——
            357093
            107127
              2500
               186
```

Pulcherrima hæc est divisionis contractio, & maximi usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum hoc est auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues divisorem Ut

137638) 1262230 (91707.

9. Divisio *speciosa* statuit magnitudinem dividentem sub dividendâ, cum lineolâ interjectâ:

jectâ: tum conſiderat an magnitudo aliqua utramque communiter multiplicaverit; atque ipſam utrobique expungit. Diviſio autem in iiſdem ſignis dat +, in diverſis —. Effertur autem per *ad*.

Applica ad	$\frac{AE}{A}$	$\frac{BAc}{Aq}$	$\frac{BA+A}{A}$	$\frac{BA-CA}{B-C}$	$\frac{6Aq}{3A}$ ſc.	$\frac{2\times3Aq:}{3A}$
Oritur	E	BA	B+1	A	2A	2A

CAP. VI. *De Proportione.*

1. SI è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum autem ad ſe invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

2. Quare ſi numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros dividat, quoti erunt diviſis proportionales.

Ut $4\times\begin{cases}7.\ 28.\\ 9.\ 36.\end{cases}$ & $4)\begin{matrix}28\ (7.\\ 36\ (9.\end{matrix}$

Item $A\times\begin{cases}B.BA.\\ C.CA.\end{cases}$ & $A)\begin{matrix}BA.\ B.\\ CA.C.\end{matrix}$

3. Quare ſi quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. $7.\ 9::7\times4.\ 9\times4::28.\ 36.$ At $7\times9\times4=9\times7\times4.$

4. Hinc ſequitur *Aurea* (quæ dicitur) *regula* Proportionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum ſub 2^do^ & 3^o^ applicetur ad 1^um^: hoc

eſt,

eſt, ſi ſecundus multiplicet tertium,& primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati ſunto 7, 9, 28: & pro quarto quæſito ſtatuatur Q. Eſt igitur 7.9::28.Q. Quare 7 Q$=$9×28. Ideoque $\frac{9 \times 28}{7} = Q$. Item 5.12::8. $\frac{8 \times 12}{5}$, hoc eſt $19\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum,duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæſtionem; Eſtque in Proportione Directâ primus terminus(ſive Diviſor) homogeneus ei per quem fit quæſtio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (ſive Diviſor) ipſe eſt per quem fit quæſtio.

6. Directa quidem Proportio eſt, quando terminus is per quem fit quæſtio, quò major eſt, eò quartum majorem requirit: & quo minor eò minorem.

7. Reciproca Proportio eſt,quando terminus is per quem fit quæſtio, quò major eſt, eò 4^{um} minorem requirit: & quò minor, eò majorem.

8. Proportio continua ∺ eſt, quando termini omnes medii inter primum & ultimū, rationum ſunt tum conſequentes,tum antecedentes. Ut 8,12,18,27,ſunt ∺. Nam 8.12::12.18::18.27. Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha c}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$, &c. ſunt ∺.

Quare ſi in hâc ſerie ultimus terminus ſit ω, & ſumma omniū terminorū totius progreſſionis ſit Z: erit Z-ω ſumma omnium antecedentium: & Z--α ſumma omnium conſequentium.

9. Si

9. Si quatuor magnitudines ſint proportionales, $A.\alpha::B.\beta$: etiam alternè, & inversè, & compoſitè, & diviſim, & conversè, & mixtim proportionales erunt.

	$A.$	$\alpha::$	$B.$	$\beta.$
alternè,	$A.$	$B::$	$\alpha.$	$\beta.$
inversè,	$\alpha.$	$A::$	$\beta.$	$B.$
compoſitè,	$A+\alpha.$	$\alpha::$	$B+\beta.$	$\beta.$
vel,	$A+B.$	$B::$	$\alpha+\beta.$	$\beta.$
diviſim,	$A-\alpha.$	$\alpha::$	$B-\beta.$	$\beta.$
vel,	$A-B.$	$B::$	$\alpha-\beta.$	$\beta.$
conversè,	$A.$	$A\pm\alpha::$	$B.$	$B\pm\beta.$
vel,	$A.$	$A\pm B::$	$\alpha.$	$\alpha\pm\beta.$
mixtim,	$A+\alpha.$	$A-\alpha::$	$B+\beta.$	$B-\beta.$
vel,	$A+B.$	$A-B::$	$\alpha+\beta.$	$\alpha-\beta.$

10. Si quotlibet magnitudines ſint proportionales, erit ut unus antecedens, ad ſuum conſequentem; ſic ſumma antecedentium, ad ſummam conſequentium. Eſto $A.\alpha::B.\beta::C.\gamma::D.\delta$: erit $A.\alpha::A+B+C+D.\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

$$\text{Nam}\left\{\begin{array}{l} A.\alpha::B.\beta.\ \&\ \text{compoſitè.} \\ A+B.\ \alpha+\beta::(B.\beta::)\ C.\gamma.\ \& \\ A+B+C.\ \alpha+\beta+\gamma::(C.\gamma::)\ D.\delta.\ \&c. \end{array}\right.$$

Item in ∺, $\alpha.\beta::Z-\omega.\ Z-\alpha$. Quare $\alpha Z-\alpha q=\beta Z-\beta\omega$. vel $\beta Z-\alpha Z=\beta\omega-\alpha q$.

Hinc obitèr liquet inventio ſummæ omnium terminorum ∺, ſive Progreſſionis Geometricæ, per hanc

$$\text{Regulam}\left\{\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}=Z.\right.$$

11. Si plurium proportionum antecedentes ſint æquales; erit ut unus antecedens, ad ſummam

mam ſuorū conſequentiū: Sic alter antecedens ad ſummam ſuorū. Eſto A.B::$\alpha.\beta$.& A.C::$\alpha.\gamma$::& A.D::$\alpha.\delta$.Erit A.B+C+D::$\alpha.\beta+\gamma+\delta$.Liquet ex priore demonſtratione, terminis alternè poſitis.

12. Si binarum rationum conſequentes ſint æquales, ſunt ut antecedentes. Si verò antecedentes ſint æquales, ſunt reciprocè ut conſequentes. $\frac{7}{1}.\frac{9}{1}$ :: 7. 9. Et $\frac{1}{9}.\frac{1}{7}$ :: 7. 9.

13. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales; ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt. Sequitur ex 3.

15. Ratio antecedentis ad conſequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad conſequentem: vel ex ratione tertii ad conſequentem, & antecedentis ad tertium. Ut

$$7.\,9.::\times\left\{\begin{array}{l}7.A.\\ A.9.\end{array}\right.\quad \text{Item } 7.\,9::\times\left\{\begin{array}{l}A.9.\\ 7.A.\end{array}\right.$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Aſtronomicis.

Si 100000 ſit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap. 4. Caſ. 3. Ut

100000. 80902 :: 39875. 32260.

Si 100000 ſit ſecundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap. 5. Ut

137638. 100000 :: 126223. 91707.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Proſthaphæreſeωn. In

In tabulis Prutenicis, Ad epicycli primi Lunæ Anomaliam Gr. 62, Proſthaph. ablativa eſt Gr. 4|1786. & Differentia ibidem Gr. 0|0433: Quanta ejus pars debetur Anomaliæ Gr. 62|5667? Dic

1. 0|0433 :: 0|5667. 0|0245: per Cap. 4. Sect. 5. Caſ. II. Tum 4|1786+0|0245=4|2031: quæ eſt Proſthaph. correcta.

Et contrà ſi quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Proſthaphæreſi Grad. 4|2031. Proximè minor in Canone eſt Gr. 4|1786, reſpondens Anomaliæ Gr. 62. Eſtque Differentia ibidem Gr. 0|0433. Eſt autem 4|2031--4|1786=0|0245. Dic

0|0433.0|0245::1.0|566+, partes adjungendæ Gr. 62. Eritque Anomalia quæſita Gr. 62|566+.

18. Converſio partium Sexageſimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexageſimales.

Partes Sexageſimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decimales, puta 0|75, convertuntur in Sexageſimas, multiplicando per 60.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ut } 6|0.\ 4|5 :: 1.\ 0|75. \\ \&\ 1.\ 0|75 :: 60.\ 45. \end{array}\right\}\text{Nam}$$

Diviſio per 60, removet lineam ſeparatricem uno loco verſus ſiniſtram, & inſuper dividit per 6. Et Multiplicatio per 60, promovet lineam ſeparatricem uno loco verſus dextram, & inſuper multiplicat per 6. Quæ regula notatu digna eſt.

Si

Si verò plures ſint ſpecies Sexageſimales annexæ Integris, puta $127^{\circ}\ 32^{\prime}\ 00^{\prime\prime}\ 09^{\prime\prime\prime}\ 45^{\prime\prime\prime\prime}$: hoc uteris compendio. Sub Integris 127 ſtatue ſpecies Sexageſimales deſcenſu obliquo: Tum facto initio ad infimam, ſingulas divide continuè per 6: Et quotos ſupraſcriptos ordini proximo ſuperiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127|5333784722 ×6
'32|0027083333
''00|1625
'''09|75
6) iv 45

Et contra, ſi partes Decimales dentur, puta 127|5333784722: multiplicabis ipſas continuè per 6; & factos ſubtus ſcribes, amputato in ſingulis ordinibus uno loco versùs dextram; ut deſcenſus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad. 236|4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc eſt 6×60. Et contra, partes, Decimales Diei puta 0|6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc eſt 60×6. Intuere diligenter exemplum.

6) 236|4276
60) 39|4046 ×6
0|6567433 :×60

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad. 236|4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc eſt, 3×5.

3) 236|4276
5) 78|8092 ×3
15|76184 ×5

Et

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15|76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc est, 5×3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho. 15|76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc est, 4×6.

Et contra partes Decimales Diei, puta 0|657433 + convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc est, 6×4.

4) 15|76184
6) 3|94046×4
0|657433:×6

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expansam, dividendo continuè per 60, & contra summa eadem expansa, 53, 09, 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic est, quod si summa collecta sit unitatum, scil. 191374°, expansa erit 53'' 09' 34°, hoc est 53 Sexagenæ secundæ, 9 Sexag. 1æ, & 34 unitates. Si verò summa collecta sit sexagesimarum secundarum, scil. 191374''; expansa erit 53° 09' 34''.

19137|4
60 318|9|3×60
53|0

19. Illa quidem proportio, rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, est autem alia proportio Arithmetica, quæ est æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem est differentia tertii & quarti, quæ est primi & secundi. Ut 7. 4: 12. 9 vel 7. 7-3: 12. 12-3. Arithmeticè proportionales sunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè

proportionalibus, ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum 7 + 12-3 = 7-3 + 12.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus addatur tertio, & primus tollatur è ſumma: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut ſi dentur 7, 4, & 12 erit 12 + 4-7 = 9, qui quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica continua, ſive Progreſſio, quando omnes termini à primo eâdem continuè exſurgunt differentia: Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia communis omnium eſt 3. Nam in hac ſerie, primus (& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex primo & differentiâ unâ: Tertius conſtat ex primo & differentiis duabus: Et generaliter quilibet terminus conſtat ex primo & ex ſummâ differentiarum, quarum numerus uno minor eſt quam numerus terminorum: Exempli gratia, terminus decimus tertius conflabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum ſumma eſt 36. Eſt igitur 4 + 36, hoc eſt 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progreſſione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & ſumma ducatur in numerum terminorum: factus erit duplicata ſumma totius Progreſſionis: Nempe 40 + 4 in 13 = 572, quæ ſumma eſt terminorum duplicata.

24. Si ſupra ſeriem terminorum in Progreſſione Geometrica; ſtatuatur pro Indicibus, ſeries terminorum qualiumcunque Progreſſionis Arithmeticæ, quibuſlibet quatuor numeris in Arithmetica proportione reſpondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales. In-

Indices, 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
Termini, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645. 10935.

Quia $10+16-6=20$; Erit $\frac{45 \times 1215}{5}=10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujusvis in Progressione Geometrica.

25. Est etiam tertia Proportio, Musica dicta, quando in quatuor numeris, est ut primus ad 4^m: sic differentia primi & secundi, ad differentiam tertii & quarti. Ut 5, 8, 12, 30, sunt Musicè proportionales: quia 5. 30 :: 8-5. 30-12 :: 3. 18. Itē in speciebus A, M, N, E; Esto A. E :: M--A. E--N. Quare AE--AN=ME--AE. Terminis hisce ritè ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M}=E$. & $\frac{EM}{2E-N}=A$.

In verbis sic, Si rectangulum sub primo & tertio dividatur per excessum primi duplicati supra secundum: quotus erit quartus in Musica proportione. Quare oportet terminos sic dari, ut primus duplicatus excedat secundum.

CAP. VII.

De Maxima COMMUNI MENSURA: Quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejusdem rationis.

1. MAxima duorum numerorum communis mensura invenitur perpetua divisione majoris per minorem, & divisoris per reliquum. Nam divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absq; ullo reliquo maxima erit utri-

utriuſque numeri dati communis menſura. Ut numerorum 899 & 744 maxima menſura invenietur 31.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 31 \qquad 124 \qquad 155 \\ 31)\ \cancel{124})\ \cancel{155})\ \cancel{744})\ \cancel{899}\ (1(4(1(4 \\ \qquad \cancel{124}\ \ \cancel{124}\ \ \cancel{620}\ \ \cancel{744} \end{array}$$

2. Numerorum reductio ad minimos terminos ejuſdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipſorum communem menſuram. Ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, diviſo utroque per 31 maximam utriuſque menſuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, diviſio diſſolvit.

3. Quare, Si maxima duorum numerorum communis menſura ſit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter ſe: ſuntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

4. Si numerus, primus ſit ad utrumque factorem, Primus erit ad factum.

Hinc proportionis operatio fieri ſæpenumero poteſt facilior, ut in exemplo.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \cancel{3} & 2 & 5 \\ \cancel{12}.\ 8 :: & \cancel{15}. & 10. \end{array}$$

5. Memento autem diligenter, *Quotieſcunque fractio aliqua, ſive ratio, proponitur, ut ipſam, primò ad minimos terminos reducas*, ut $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

CAP.

CAP. VIII.

De PARTIBUS: quæ etiam fractiones, sive numeri fracti, dicuntur.

1. UNitas (sive integrum unumquodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes divisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem unitas continet, sortiuntur: ut si unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem divisam in totidem æquales partes; & dicitur Denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur Numerator.

Ut $\frac{4}{5}$ Numerator / Denominator } & significant quatuor quintas partes, sive quatuor partes unius integri divisi quinquifariam.

3. *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad unitatem.* $4.5::\frac{4}{5}.1.$ $R.S.::\frac{R}{S}.1.$

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris similiter sese ad invicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non iisdem solummodò numeris, sed aliis infinitis, posse designari. Ut quincuncem significant non

modo $\frac{5}{12}$, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5. Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales; & contra.

6. Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem; et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$. Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. Item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$.

CAP. IX.

De Additione & Subductione Partium.

1. SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alter-

nos

nos quotos. Deinde in numeratoribus partium inventarum ejusdem denominationis additio vel subductio instituenda est. Et summæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator subscribendus.

2. Et si integri partibus sint immixti, seorsim tamen sunt numerandi. Exempli gratia: Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ sunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus redemptis è $6\frac{1}{18}$ restabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo.

$$\begin{array}{ccc} & 67 & \\ & 39+28 & \\ & \cancel{13} \quad \cancel{7} & \\ & -\,2\,- & \text{est } 3 \\ 4) & \cancel{16} \quad \cancel{12} & \\ & \underbrace{4 \quad\quad 3}_{48} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 57 \quad\quad 8 & \\ & \cancel{19} \quad\quad 1 & \\ & -\,\text{è } 6\,- & \\ 6) & \cancel{48} \quad \cancel{18} & \\ & \underbrace{8 \quad\quad 3}_{144} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{è } 5\frac{152}{144} = 6\frac{8}{144} \\ \text{tolle} \\ 3\frac{57}{144} \\ \text{manet} \\ 2\frac{95}{144} \end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, summa $\frac{A+ZB}{B}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, restat $\frac{CA - Bq}{BC}$

$$\begin{array}{cc} & BE \pm DA \\ & B \pm D \\ C) & \overline{CA} \quad \overline{CE} \\ & \underbrace{A \quad\quad E}_{CAE} \end{array}$$

CAP. X.

De Multiplicatione & Divisione Partium.

1. MUltiplicatio comparat heterologos terminos (hoc eſt, reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2. Diviſio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3. Et ſi integri partibus ſint immixti reſolvendi ſunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$ in $\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}}$ fit $\frac{5}{12}$ | $\frac{\overset{4}{8}}{9}$ in $\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}}$ fit $\frac{20}{27}$ | $\frac{5}{1}$ in $3\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4}$ fit $\frac{65}{4}$ ($16\frac{1}{4}$

$\frac{A}{B}$ in B fit A | $\frac{A}{B}$ in Z fit $\frac{ZA}{B}$ | $\frac{A}{B}$ in $\frac{ZA}{C}$ fit $\frac{ZAq}{BC}$

Exempla Diviſionis.

$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$) $\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{28}}}$ ($\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}}$) $7\frac{\overset{37}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}$ ($\frac{111}{8}$ ($13\frac{7}{8}$ | $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}$) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}$ ($\frac{12}{1}$

$\frac{D}{1}$) $\frac{Aq}{B}$ ($\frac{Aq}{DB}$ | $\frac{A}{D}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BCD}{A}$ | $\frac{A}{B}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BqC}{A}$

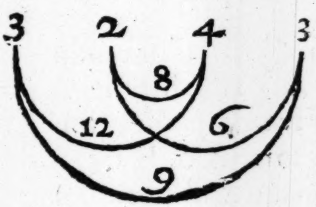
$\frac{B}{A}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{CA}{1}$ | $\frac{Ac}{C}$) $\frac{Bc}{D}$ ($\frac{BcC}{DAc}$

4. Quis

4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$. Nam 1. $\frac{2}{7}$::21.6. vel 7. 2::21.6.

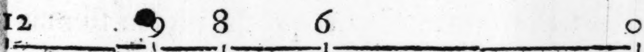
5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7}$. 1::6.21. vel 2.7::6.21.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum: si rationes sint 3 ad 2, & 4 ad 3.



7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientq; $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertiâ facit duplam: vel ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

8. Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est acsi jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$)$\frac{3}{2}$($\frac{9}{8}$ ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentiā inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisa in duodecim partes.



CAP. XI.

Exempla aliquot facillima, quibus quæ hactenus tradita ſunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationem Analyticam ſternitur.

1. Sciendum primò eſt, quod, in ſequentibus, tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ gratia, paſſim ferè his verborum ſymbolis utor. A & E ſignificant duos numeros, ſive magnitudines; quorum A plerumque major eſt, E minor. Æ rectangulum ſub ipſis. Z eſt ſumma. X differentia. Zq ſummæ quadratum. Xq differentiæ quadratum. Z ſumma quadratorum. X differentia quadratorum. Z ſumma cuborum. X differentia cuborum. A,M,E, ſunt tres continuè proportionales : A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinque puncta incluſis ſignificant illiuſmodi poteſtates. √ denotat radicem ſive latus poteſtatis ſimplicis, ſi non intercedant duo puncta : Si vero poteſtas duobus utrinque punctis includatur, ſignificat latus ipſius univerſale : quod etiam aliter per literam b vel r deſcribi ſolet, ut √ b latus eſt Binomii, & √ r latus Reſidui ſive Apotomes. = nota eſt æqualitatis.

2. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major eſt A, minor E : quænam eſt ipſorum ſumma ? quæ differentia ? quod ſub ipſis rectangulum ? quæ quadratorum ſumma ? quæ quadratorum differentia ? quæ ſummæ & diffe-

differentiæ ipſorum ſumma? quæ ſummæ & differentiæ ipſorum differentia? quod ſummæ & differentiæ ipſorum rectangulum? quod ſummæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ ſumma? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ differentia? quod quadratū rectanguli?

Z eſt $A+E$. X eſt $A - - E$. $Æ$ eſt AE.

$\mathcal{Z} = Aq + Eq$ $\mathcal{X} = Aq - - Eq.$

$Z + X = 2A$ $Z - X = 2E.$

$\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X = A.$ $\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}X = E.$

$ZX = Aq - Eq = \mathcal{X}.$ $Zq.\mathcal{X} :: Z.X.$

$Zq = Aq + 2AE + Eq = \mathcal{Z} + 2Æ.$

$Xq = Aq - 2AE + Eq = \mathcal{Z} - 2Æ.$

$Zq + Xq = 2Aq + 2Eq = 2\mathcal{Z}.$

$Zq - Xq = 4AE.$ $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = Æ.$

$Æq = AqEq.$

3. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum ſumma eſt Z, & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$E = Z - A$ $X = 2A - Z.$ $Æ = ZA - Aq$

$\mathcal{Z} = Zq - 2ZA + 2Aq.$ $\mathcal{X} = 2ZA - Zq.$

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

$A = Z - E$ $X = Z - 2E.$ $Æ = ZE - Eq.$

$\mathcal{Z} = Zq - 2ZE + 2Eq.$ $\mathcal{X} = Zq - 2ZE.$

4. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum differentia eſt X, & major ex ipſis

ponitur A : quiſnam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$E = A - X. \quad Z = 2A - X. \quad Æ = Aq - XA.$
$Z = 2Aq - 2XA + Xq. \quad X = 2XA - Xq.$

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

$A = E + X \quad Z = 2E + X \quad Æ = Eq + XE.$
$Z = 2Eq + 2XE + Xq. \quad X = 2XE + Xq.$

5. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipſis ponitur A : quiſnam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quæ ipſorum differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia.

$$E = \frac{SA.}{R} \quad Z = \frac{RA + SA}{R} \quad X = \frac{RA - SA.}{R}$$
$$Æ = \frac{SAq}{R}. \quad Z = \frac{RqAq + SqAq}{Rq}. \quad X = \frac{RqAq - SqAq.}{Rq}$$

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

$$A = \frac{RE.}{S} \quad Z = \frac{RE + SE.}{S} \quad X = \frac{RE - SE.}{S}$$
$$Æ = \frac{REq}{S}. \quad Z = \frac{RqEq + SqEq}{Sq}. \quad X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$$

6. Sunt

6. Sunt duo numeri five magnitudines, quorum rectangulum eft Æ ; & major ex ipfis ponitur A : quifnam eft minor? quæ ipforum fumma? quæ ipforum differentia? quæ quadratorum fumma? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ}{A} \qquad Z = \frac{Aq + Æ.}{A} \qquad X = \frac{Aq - Æ.}{A}$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq.}{Aq} \qquad X = \frac{Aqq - Æq.}{Aq}$$

Si vero minor ex ipfis ponatur E :

$$A = \frac{Æ}{E} \qquad Z = \frac{Æ + Eq.}{E} \qquad X = \frac{Æ - Eq.}{E}$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq.}{Eq} \qquad X = \frac{Æq - Eqq.}{Eq}$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla fumemus in fumma & differentia.

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} \text{ \&c.}$$

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} \text{ \&c.}$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt inftitui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diverfitates.

CAP. XII.

De Genesi & Analysi POTESTATUM.

1. QUia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicata. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum: Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana [4]: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam [5]: Et sic ulteriùs progrediendo fiunt potestates sextana [6], septimana [7], octavana [8], nonana [9], decumana [10], & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

2. Quare potestatum à radice singulari quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

Ta

Tabula Prior POTESTATUM *à* RADICE *singulari.*

L N	[2] q	[3] c	[4] qq	[5] qc	[6] cc	[7] qqc	[8] qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

3. Quæ verò à radice binarum notarum exſurgunt, hunc habent ortus ſui modum.

Geneſis poteſtatum à radice binomia.

A+E Radix
A+E

Aq+AE
+AE+Eq

Aq+2AE+Eq. Quadratum
A+E

Ac+2AqE+AEq
+AqE+2AEq+Ec

Ac+3AqE+3AEq+Ec. Cubus
A+E

Aqq+3AcE+3AqEq+AEc
+AcE +3AqEq +3AEc+Eqq

Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq. Quadrato (quadrat
A+E &c.

4. Atque hoc artificio conficietur tabul poteſtatum aſcendentium in ſcala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

A E

A Latus sive numerus.
E

[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
	Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
		Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccEqq
			Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
				Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
					Eqqc.	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
						Eqcc.	9AEqcc	45AqEqcc
							Eccc	10AEccc
								Eqqcc

5. Quælibet ſpecies intermedia cujuſq; ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinq; proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiã affigendus ex utroq; numero iiſdem affixo, aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6. In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorũ generũ ſunt diagonales: & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus affixæ ſunt *unciæ*, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7. Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſq; notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus & triplice item ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimiliter de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8. Oſtendit inſuper plena hæc myſteriis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locũ. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies, cuborum ſedes binos interponent locos complementis ſuis ordine diſtribuendos.

CAP.

CAP. XIII.

His itaque præmissis ad GENESIN Potestatum accedamus.

1. PRoponatur Genesis quadrati à latere 57. Major igitur nota A est 5, minor E est 7. Scribantur 5 & 7 intermisso unius gradus spatio: & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur quadratum suum 25: & sub 7 suum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendū loco intermedio. Addantur omnia suis quæque locis. Summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæsito.

5	7		
25		Aq	
7	0	2AE	gnomon.
	49	Eq	
32	49		

2. Proponatur iterum Genesis cubi à latere 57. Scribantur 5 & 7 intermisso duorum graduum spatio: & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur cubus suus 125: & sub 7 suus 343. tum quadratū à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum solidum majus 525, ponendum loco

5	7		
125	Ac		
52	5	3AqE	
7	35	3AEq	gnomon.
	343	Ec	
185	193		

loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum ſolidum minus 375, ponendum loco intermedio ſecundo. Addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 185193 pro cubo lateris 57 quæſito.

3. Si latus propoſitum conſtet pluribus figuris, ut 57209: Primò poteſtas duarum primarum figurarum 57 quærenda eſt. Deinde ſumptis 57 pro A, & figura 2 ſequente pro E: quæratur poteſtas ipſius eodem, qui ante oſtenſus eſt, tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris ſingulatim eſt faciendum.

5	7	2	0	9		Radix.
25		Aq				
7	0	2Æ				gnomon.
	49	Eq				
32	49		Aq			
	22	8	2Æ			gnomon.
		4	Eq			
32	71	84	00		Aq	
	1	02	96	0	2Æ	gnomon.
				81	Eq	
32	72	86	96	81		Quadrat.

5	7	2	0	9	Radix.	
125		Ac				
52	5	3AqE				
7	35	3AEq	Gnomon.			
	343	Ec				
185	193		Ac			
1	949	4	3AqE			
	6	84	3AEq	Gnomon.		
		8	Ec			
187	149	248	000		Ac	
	88	339	680	0	3AqE	
		13	899	60	3AEq	Gnomon.
				729	Ec	
187	237	601	580	329	Cubus.	

4. Ex his, quæ jam declarata ſunt, non difficile erit reliquas etiam omnes ſuperiorum generum poteſtates progignere: modò in ipſarum genitura inferiorum omnium ad ipſas adſcendentium poteſtatum geneſis inſtituatur: ſicut in cubi geneſi jam factum vides.

C A P.

CAP. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.

1. ANalysis, postquam sedes potestatum, pro suo quasque juxta tabulam genere, punctis, posito primo puncto sub loco unitatum, distinxerit: primò ex figuris primi à sinistra puncti potestatem diagonalem comprehensam tollit: latusque ipsius, quod A vocetur, in margine scribit. Tum numero reliquo, ad proximum usque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per divisorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviso, secundum latus E quærit & in margine scribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo subtrahit. Et sic integra duorum primorum singularium laterum, in duobus primis punctis contenta, potestate dempta, restabit ad tertium usque punctum gnomon pro tertio latere similiter eruendo.

Analyſis quadrati.

1		
723	02	
3272	8696	81 (57209 punctatio
28	Aq	
10	2 A	Diviſor.
70	2AE	
49	Eq	
749		Gnomon.
11	4 2A	Diviſor.
22	8	2AE
	4	Eq
22	84	Gnomon.
1	144	2A Diviſor.
	1144	0 2A Diviſ.
1	0296	0 2AE
		81 Eq
1	0296	81 Gnomon.

Analyſis

Analysis Cubi.

2	ø88				
ø2	ø44	353			
187	237	6ø1	5 8 ø	329	(57209
125		Ac			
7	5	3Aq			
	15	3A			
7	65	divisor			
52	5	3AqE			
7	35	3AEq			
	343	Ec			
6ø	193	gno-	mon		
	974	7	3Aq		
	1	7 1	3A		
	976	4 1	divi-	sor	
1	949	4	3AqE		
	6	84	3AEq		
		8	Ec		
1	958	2 4 8	gno-	mon	
	98	1 5 5	2	3Aq	
		1 7	16	3A	
	98	1 7 2	36	divisor	
	9	8 1 5	5 2 0	0	3Aq
			1 7 1	60	3A
	9	8 1 5	6 9 1	60	divisor
	88	3 3 9	6 8 0	0	3AqE
		1 3	8 9 9	60	3AEq
				729	Ec
	88	3 5 3	5 8 ø	329	gnomon.

5	7	2	0
25			
7	0		
	49		
32	49		
	22	8	
		4	
32	71	84	

2. Si numerus propositus non sit verus sui generis figuratus, sed peracta Analysi aliquid restet: punctationes circulorum pro suo genere, quot opus erit, statuendæ sunt: & continuanda Analysis post lineam separatricem.

3. Ex his etiam quæ declarata sunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex superioribus potestatibus omnibus educere.

CAP. XV.

De LATERIBUS SURDIS.

1. SI quotlibet numeri sint continuè proportionales: Erit ut primus ad ultimum, sic potestas primi æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad potestatem similem secundi. Sunto quatuor ∺ A,M,N,E.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l}A.M::A.M\\ M.N::A.M\\ N.E::A.M\end{array}\right\}\text{Erit per Multiplicationem } A.E::Ac.Mc.$$

2. Numeri plani vel solidi similes, sunt, quorum latera homologa sunt proportionalia.

3. Numeri plani similes, sunt in duplicatâ ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani similes, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri solidi similes, sunt in triplicatâ ratione (hoc est, ut Cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri solidi similes, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4. Et generaliter omnes figurati ſimiles plurium dimenſionum, ſunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimenſionum, ex quibus componuntur. Dimenſiones ſunto quatuor, nempe A B C D unius, & E F G H alterius, in ratione R ad S.

Quia { A. E::R.S
B. F::R. S
C.G::R.S
D.H::R.S } Erit per multiplicationem ABCD. EFGH::Rqq. Sqq.

5. Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus, latus ejus dicitur ſurdum: & ſic notatur, √q6, √c4, √qq20, √qc13: hoc eſt, latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6. Latera ſurda commenſurabilia, ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti, fiunt veri ſui generis figurati: ſuntque idcirco ut numerus ad numerum, ut √q12 & √q147 reducta ad minimos terminos per √q3 maximam utriuſque communem menſuram, fiunt √q4 & √q49, hoc eſt 2 & 7: quare cum √q12 & √q147, ſint ut 2 ad 7, erunt cōmenſurabilia. Sic √c40 & √c1715 ſunt ut 2 ad 7, quoniam diviſa per maximam ſuam communem menſuram √c5, fiunt √c8 & √c343; hoc eſt 2 & 7, ideoque commenſurabilia.

7. Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, latera ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differentiæ, numerorum ipſis ſimilium inventorum

torum homogenea poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Ut $\sqrt{q}147 + \sqrt{q}12$ eſt $\sqrt{q}243$; hoc eſt latus quadrati à $7+2$ (nempe 81) ductum in $\sqrt{q}3$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\sqrt{q}147 - \sqrt{q}12$ eſt $\sqrt{q}75$; hoc eſt latus quadrati à $7-2$ (nempe 25) ductum etiam in $\sqrt{q}3$.

Item $\sqrt{c}1715 + \sqrt{c}40$ eſt $\sqrt{c}3645$, hoc eſt latus cubi $7+2$ (nempe 729) ductum in $\sqrt{c}5$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\sqrt{c}1715 - \sqrt{c}40$ eſt $\sqrt{c}625$, hoc eſt latus cubi à $7-2$ ductum etiam in $\sqrt{c}5$.

Additionis & ſubductionis operatio talis eſt.

$\sqrt{q}3)$ $\sqrt{q}147$ $(\sqrt{q}49.\ 7$ $\quad$ $\sqrt{c}5)$ $\sqrt{c}1715$ $(\sqrt{c}343.\ 7$

$\sqrt{q}\ 12$ $(\sqrt{q}4.\ 2.$ $\quad$ $\sqrt{c}\ 40$ $(\sqrt{c}\ 8.\ 2$

$\sqrt{q}243$ $\sqrt{q}81.\ 9$ ſumma $\sqrt{c}3645$ $(\sqrt{c}729.\ 9$

$\sqrt{q}75$ $\sqrt{q}25.\ 5$ differ. $\sqrt{c}\ 625$ $(\sqrt{c}125.\ 5$

$\sqrt{12} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$

vel $\sqrt{\tfrac{48}{4}} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$

$\sqrt{\tfrac{3}{4}})$ $\sqrt{48}$ $(\sqrt{16}.\ 4$

$\sqrt{27}$ $(\sqrt{9}.\ 3$

$\sqrt{\tfrac{147}{4}}$ $\sqrt{49}.\ 7$

$\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ $\sqrt{1}.\ 1$

$\sqrt{\tfrac{245}{12}} + \sqrt{\tfrac{5}{12}}$

$\sqrt{\tfrac{5}{12}})$ $\sqrt{245}$ $(\sqrt{49}.\ 7$

$\sqrt{5}$ $(\sqrt{1}.\ 1$

$\sqrt{\tfrac{320}{12}}$ $\sqrt{64}.\ 8$

$\sqrt{\tfrac{180}{12}}$ $\sqrt{36}.\ 6$

8. Latera verò ſurda incommenſurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel ſubtrahuntur, ſignis + vel −. ut $\sqrt{q}7 + \sqrt{q}3$. & $\sqrt{c}10 - \sqrt{c}5$.

9. Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit nu-

numerus ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et ſi numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejuſdem generis figuratus cujus latus æquale eſt quoto lateris Dividendi ad Diviſoris latus applicati. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 eſt 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus eſt 7×3. Item $\surd q \frac{AqEq}{Bq}$ eſt $\frac{AE}{B}$.

10. Quare laterum ſurdorum homogeneorum multiplicatio, & diviſio, procreat latus etiam ſurdum homogeneum: ut $\surd q7$ in $\surd q3$ eſt $\surd q21$. Et $\surd q7)\ \surd q21\ (\ \surd q3$: vel $\surd q\frac{21}{7}$ eſt $\surd q3$. Item $\surd qA$ in $\surd qE$ eſt $\surd qAE$. Et $\surd qA) \surd qAE$ $(\surd qE$: vel $\surd q\frac{AE}{A}$ eſt $\surd qE$.

11. Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, niſi prius ad idem genus reducuntur. Quod fit dividendo indices utriuſque poteſtatis propoſitæ per maximam ipſorum communem menſuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipſas poteſtates in ſpecies alternis quotis cognomines. Ut ſi ad multiplicandum vel dividendum proponantur $\surd qq10$ & $\surd cc7$. Primò reducuntur ad $\surd cccc1000$, & $\surd cccc49$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel diviſio. Sic etiam $\surd qqA$, & $\surd ccBq$ reducuntur ad $\surd ccccAc$, & $\surd ccccBqq$: uti planiùs apparebit per praxim, quæ hic apponitur.

$$\frac{\sqrt{[12]}1000\sqrt{[12]}49}{[2])\sqrt{[4]}10 \quad \sqrt{[6]}7} \qquad \frac{\sqrt{[12]}Ac\sqrt{[12]}Bqq}{[2])\sqrt{[4]}A \quad \sqrt{[6]}Bq}$$

$$[2] \qquad [3] \qquad\qquad [2] \qquad [3]$$

Rurſus ſi $\sqrt{c32}$ duplicandum ſit, vel multiplicandum per 2: pro 2 ſumatur $\sqrt{c8}$: & per ipſum multiplicetur $\sqrt{c32}$; fietque $\sqrt{c256}$ æquivalens bis $\sqrt{c32}$.

Item ſi dimidiandum ſit $\sqrt{c32}$, vel dividendum per 2: pro 2 ſumatur $\sqrt{c8}$: & per ipſum dividatur $\sqrt{c32}$; orieturque $\sqrt{c}\frac{32}{8}$; hoc eſt $\sqrt{c4}$, æquivalens $\frac{1}{2}$ $\sqrt{c32}$.

Sic etiam $\frac{22}{7}\sqrt{qAq}$, fiet $\sqrt{q}\frac{484}{49}$ Aq, hoc eſt $\frac{22}{7}$A

12. Si latus poteſtatis multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam ſuæ ſpeciei: deleatur nota ſpeciei lateralis: ut Q: $\sqrt{q64}$, vel C: $\sqrt{c64}$, eſt 64.

13. Et ſi latus poteſtatis, cujus index eſt numerus compoſitus, multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam alterutrius ſpeciei componentis: latus alterius ſpeciei numero ſpeciali ſolùm præfigatur: ut Q: $\sqrt{cc64}$ eſt $\sqrt{c64}$ & C. $\sqrt{cc64}$ eſt $\sqrt{q64}$. Nam $\sqrt{cc}$ eſt $\sqrt{[2\times3]}$

14. Si magnitudo plurium, nominum, ducatur in ſeipſam cum uno ex ſuis ſignis mutato expurgabitur unum nomen. Ut $3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, fiet $12+\sqrt{180}$.

CAP. XVI.

De ÆQUATIONE. & de Quæstionibus per Æquationem solvendis.

1. QUotiescunque problema aliquod, sive quæstio, proponitur: Puta præstitũ esse quod postulatur: aptâque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis consonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoscantur.

2. Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæsitæ, secundum conditionem quæstioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando, & dividendo, donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel suæ, ad quam ascendet, potestati æquale.

3. Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi, ut quæ in data habentur mensura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque sequentes commonstrabunt.

4. Primò, si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq + Bq}{D} + B + C$: Erit $D\,A - D\,C = Aq + Bq + DB + DC$.

5. Se-

5. Secundò, si quæ in data habentur mensura, immisceantur cũ quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* Ut DA-DC=Aq+Bq+DB+DC: Et transpositis DC & Aq, erit DA-Aq=2DC+DB+Bq. Quæ etiã regula in omni transpositione servanda est.

6. Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam; fiat omnium magnitudinũ æquationis ad illam communis applicatio. Ut BAq+BqA= Zc, erit $\text{Aq}+\text{BA}=\frac{\text{Zc}}{\text{B}}$

7. Quartò, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per applicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellæ, communis depressio. Ut Aqq+BAc= ZqAq, erit Aq+BA=Zq, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut Ac +XAq=Nc, divisa per A, fiet $\text{Aq}+\text{XA}=\frac{\text{Nc:}}{\text{A}}$ at divisa per Aq, fiet $\text{A}+\text{X}=\frac{\text{Nc}}{\text{Aq}}$. Quæ quidem operatio in numerosa affectarum æquationum resolutione usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum faciliùs æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

8. Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est institu-

enda. Ut $\sqrt{q}BA+B=C$: vel per transpositionem $\sqrt{q}BA=C-B$. Ideoque ipsorum quadrata, $BA=Cq-2CB+Bq$: vel $A=\frac{Cq-2CB+Bq.}{B}$

Item $\sqrt{u}:BA+CA:-D=B$. Vel $\sqrt{u}:BA+CA:=D+B$. Ideoque & ipsorum quadrata $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: vel $A=\frac{Bq+2BD+Dq.}{B+C}$ Deniq; $\sqrt{q}\frac{A}{3}=\sqrt{c}2A$: vel per 11 c15, $\sqrt{cc}\frac{Ac}{27}=\sqrt{cc}4Aq$. Quare $Ac=108Aq$. Et $A=108$.

9. Æquationū, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes, constitutio liquebit ex sect. 2, 3, 4. capitis 11: Nam quia

$Z-A=E$: ducatur utraque pars in A.
$Z-E=A$: ducatur utraque pars in E.
$A-X=E$: ducatur utraque pars in A.
$E+X=A$: ducatur utraque pars in E.
Et similiter fiat in Z & X, &c.

Atque hac multiplicatione hujusmodi orientur æquationes.

$ZA-Aq=Æ$	$Aq-XA=Æ$
$ZAq-Aqq=Æq$	$Aqq-XAq=Æq$
$ZAc-Acc=Æc$	$Acc-XAc=Æc$
&c	&c
$ZE-Eq=Æ$	$Eq+XE=Æ$
$ZEq-Eqq=Æq$	$Eqq+XEq=Æq$
$ZEc-Ecc=Æc$	$Ecc+XEc=Æc$
&c	&c

Quotiescunque igitur proponitur Æquatio constans ex tribus speciebus æqualiter in ordine scalæ ascendentibus: Cogitabis magnitu-

tudinem abſolutam datam, eſſe rectangulum ſub duabus magnitudinibus quæſitis, ſive latera ſint, ſive quadrata, ſive cubi, &c. qualis ſcil. eſt poteſtas mediæ ſpeciei. In media autem ſpecie, ſi altiſſima ſpecies ſit negata, coëfficientem eſſe ſummam magnitudinum quæſitarum; Et de utrâque exponi. At ſi altiſſima ſpecies ſit affirmata, coëfficientem eſſe magnitudinum quæſitarum differentiam; ipſam autem ſpeciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum ſumma & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur ſumma. Nam per 2 Cap. XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:}\text{-}Æ = Q{:}\tfrac{1}{2}X \\ Q{:}\tfrac{1}{2}X{:}+Æ = Q{:}\tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\}\text{quare}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Zq - Æ{:} = \tfrac{1}{2}X. \\ \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Xq + Æ{:} = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Deniq; datis binarũ magnitudinũ $\frac{1}{2}Z$&$\frac{1}{2}X$, dantur ipſæ magnitudines; hiſce duabus Regulis.

$$\text{I Reg. } \tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Zq\text{-}Æ{:}(\tfrac{1}{2}X) = \begin{array}{l}A.\\E.\end{array}$$

$$\text{II Reg. } \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Xq + Æ{:}\ (\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X = \begin{array}{l}A.\\E.\end{array}$$

Atque hæ duæ ſunt regulæ pro ſolutione Æquationis cujuſque; in qua ſunt tres ſpecies, æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes.

10. GENESIS ſex Binomiorum ex lateribus ſuis ſurdis. Regula eſt, $Z + 2Æ = Zq$. In Apotomis verò, $Z\text{-}2Æ = Xq$.

Exempl. I. Quadretur Binomium $4 + \sqrt{11}$. Hîc Z eſt 16 + 11, hoc eſt 27. Et Æ eſt $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc eſt $\sqrt{176}$: cujus duplum eſt $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27 + \sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I. Ex-

Exempl. II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq}\,12+\sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{}\,12+\sqrt{\frac{27}{4}}$, vel $\sqrt{\frac{48}{4}}+\sqrt{\frac{27}{4}}$, hoc est $\sqrt{\frac{147}{4}}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,12\times\sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$, vel $\sqrt{qq}\,3\times\sqrt{qq}\,27$; hoc est, $\sqrt{qq}\,81$, scil. 3. cujus duplum est 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{147}{4}}+6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl. III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3}+\sqrt{qq}\,15$. Hic Z est $\sqrt{\frac{80}{3}}+\sqrt{15}$, vel $\sqrt{\frac{80}{3}}+\sqrt{\frac{45}{3}}$; hoc est $\sqrt{\frac{245}{3}}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3}\times\sqrt{qq}\,15$, vel $\sqrt{}\,qq80\times\sqrt{qq}\,5$; hoc est $\sqrt{qq}\,400$, scil. $\sqrt{20}$: cujus duplum est $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{245}{3}}+\sqrt{80}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ constant ex radicibus Binomii & Residui connexis, ut $\sqrt{b}: A+E:$ pl $\sqrt{r}: A-E:$ perspicuum est Z esse 2 A: & Æ esse $\sqrt{}: Aq-Eq$: quare

Exempl. IV. Quadretur Major, $\sqrt{b}: \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}: \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}$. Hîc Z est $\frac{7}{2}+\frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est $\sqrt{u}: \frac{49}{4}-\frac{29}{4}$: hoc est, $\sqrt{\frac{20}{4}}$, scil. $\sqrt{5}$: cujus duplum est $\sqrt{20}$. Quadratum igitur erit $7+\sqrt{20}$. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl. V. Quadretur Potens rationale cum mediali, $\sqrt{b}: \sqrt{5}+1$: pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-1$. Hîc Z est $\sqrt{5}+\sqrt{5}$; hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}: 5-1$ hoc est, $\sqrt{4}$, scil. 2 cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit $\sqrt{}\,20+4$. Quod dicitur Binomium V.

Exempl. VI. Quadretur Potens duo medialia, $\sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Hîc Z est $\sqrt{5}+\sqrt{5}$, hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}: 5-3$: hoc est $\sqrt{2}$: cujus duplum est $\sqrt{8}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{20}+\sqrt{8}$. Quod dicitur Binomium VI.

II

11. ANALYSIS. In Binomio igitur quadratico, majus nomen est Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI. ordinatum est, $\frac{1}{4}Zq - Æ = \frac{1}{4}Xq$: scil. $\frac{1}{4}Q{:}A+E{:}-Æ = \frac{1}{4}Q{:}A-E$. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}Q{:}Aq+Eq{:}-AqEq = \frac{1}{4}Q{:}Aq-Eq$: hoc est, $\frac{1}{4}Zq - Æq = \frac{1}{4}Xq$, ex quo Theoremate pro Analysi Binomii deducitur hæc Regula.

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \surd q{:}\tfrac{1}{4}Zq - Æq{:}(\tfrac{1}{2}X) = \begin{matrix}Aq.\\ Eq.\end{matrix}$$

Exempl. I. Quæratur latus Binomii I, $27+\surd 704$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\frac{27}{2}$: & Æ est $\surd\frac{704}{4}$: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{729}{4} - \frac{704}{4}$, hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\frac{27}{2} \pm \frac{5}{2} = \left.\begin{matrix}16. & 4\\ 11. & \surd 11\end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitū est $4+\surd 11$. Et dicitur Binomiū I.

Exempl. II. Quæratur latus Binomii II, $\surd\frac{147}{4}+6$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\surd\frac{147}{16}$: Et Æ est 3. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{147}{16} - (9)\frac{144}{16}$; hoc est $\frac{3}{16}$: cujus latus $\surd\frac{3}{16}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\surd\frac{147}{16} \pm \surd\frac{3}{16} = \left.\begin{matrix}\surd 12. & \surd qq12.\\ \surd\frac{27}{4}. & \surd qq\frac{27}{4}.\end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\surd qq12 + \surd qq\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl. III. Quæratur latus Binomii III, $\surd\frac{245}{3}+\surd 80$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\surd\frac{245}{12}$: & Æ est $\surd 20$. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{245}{12} - (20)\frac{240}{12}$, hoc est $\frac{5}{12}$: cujus latus $\surd\frac{5}{12}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Regul. $\surd\frac{245}{12} \pm \surd\frac{5}{12} = \left.\begin{matrix}\surd\frac{80}{3}. & \surd qq\frac{80}{3}\\ \surd 15. & \surd qq15\end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\surd qq\frac{80}{3} + \surd qq15$. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl. IV. Quæratur latus Binomii IV, $7+\surd 20$; nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\frac{7}{2}$: & Æ est $\surd 5$: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $\frac{49}{4} - (5)\frac{20}{4}$; hoc est; $\frac{29}{4}$: cujus

 latus

latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ eſt $\frac{1}{2}$X. At per Regul. $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} =$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}.\sqrt{b}:\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} \\ \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}.\sqrt{r}:\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} \end{array}\right\}$$

Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{b}:\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}:\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major

Exempl. V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20} + 4$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ eſt $\sqrt{5}$: & Æ eſt 2: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq eſt 5-4; hoc eſt 1, cujus latus 1 eſt $\frac{1}{2}$X. At per Reg. $\sqrt{5} \pm 1 =$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5} + 1.\sqrt{b}:\sqrt{5} + 1 \\ \sqrt{5} - 1.\sqrt{r}:\sqrt{5} - 1 \end{array}\right\}$$

Latus igitur quæſitū eſt $\sqrt{b}:\sqrt{5} + 1$:pl $\sqrt{r}:\sqrt{5} - 1$, Et dicitur Potens rationale cum mediali

Exempl. VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20} + \sqrt{8}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z eſt $\sqrt{5}$: & Æ eſt $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}$Zq-Æq eſt 5-2; hoc eſt 3. cujus latus $\sqrt{3}$ eſt $\frac{1}{2}$X. At per Reg. $\sqrt{5} \pm \sqrt{3} =$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5} + \sqrt{3}.\sqrt{b}:\sqrt{5} + \sqrt{3}. \\ \sqrt{5} - \sqrt{3}.\sqrt{r}:\sqrt{5} - \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{b}:\sqrt{5} + \sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}:\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12. Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Geneſis ſe offert. Quia Zq=Xq+4AE, nempe Hq=Bq+Cq. per 47e1: Propoſitis binis quibuſcunque lineis ſive numeris A&E, trianguli rectanguli latera erunt, A+E, A-E, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A&E in Aq&Eq) Aq+Eq. Aq-Eq. 2AE, (ſcil. $\sqrt{4AqEq}$.) Ut ſi proponantur duo numeri 2&1: latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe 2+1, 2-1, $\sqrt{4 \times 2 \times 1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe 4+1, 4-1, 2×1 bis.

13. Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipſis fabricare: idque dupliciter,

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. Quia Bq=Hq-Cq} \\ \text{Et bq=hq-cq} \end{array}\right\} \text{Multiplicentur invicē;}$$

Eritque

Eritque $Bqbq = Hqhq + Cqcq$ mi $Hqcq + Cqhq$.
At $Hqhq + Cqcq + 2Hchc = Q{:}Hh + Cc$:
Et $Hqcq + Cqhq + 2HChc = Q{:}Hc + Ch$:
Subducatur unũ quadratum ex altero: & erit,
$Bqbq = Q{:}\,Hh + Cc$: mi $Q{:}\,Hc + Ch$:
Et ſic inventum eſt ex his triangulum tertium,
$Bb.\ Hh + Cc.\ Hc + Ch$. Hæc Regula ſit I.

Enunciatur autem verbis ſic. Pro trianguli novi baſe, ſumatur rectangulum ſub baſibus: Pro hypotenuſa, rectangulum ſub hypotenuſis auctum rectangulo ſub cathetis. Pro catheto, rectangulum ſub hypotenuſa primi & catheto ſecundi, auctum rectangulo ſub catheto primi & hypotenuſa ſecundi.

II. Quia $\left.\begin{array}{l} Hq = Bq + Cq \\ \text{Et } hq = bq + cq \end{array}\right\}$ Multiplicentur invicẽ

Eritque $Hqhq = Bqbq + Cqcq$ pl. $Bqcq + Cqbq$.
At $Bqbq + Cqcq - 2BCbc = Q{:}\,Bb - Cc$:
Et $Bqcq + Cqbq + 2BCbc = Q{:}\,Bc + Cb$:
Addantur hæc duo quadrata: & erit
$Hqhq = Q{:}\,Bq - Cc$: pl. $Q{:}\,Bc + Cb$.

Et ſic inventũ eſt ex his triangulum tertium,
$Hh.\ Bb - Cc.\ Bc + Cb$. Hæc Regula ſit II.

Enunciatur autem verbis ſic. Pro trianguli novi hypotenuſa, ſumatur rectangulum ſub hypotenuſis. Pro baſe, rectangulum ſub baſibus minutum rectangulo ſub cathetis. Pro catheto, rectangulum ſub baſe primi & catheto ſecundi, auctum rectangulo ſub catheto primi & baſe ſecundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio triangulum pro-

 ducet

ducet bicompositum: secunda tricompositum: tertia quadricompositum: & sic ulterius.

Exempl. Reg. I. Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

B. H. C. trianguli simpli.
B. H. C.

Bq. Hq+Cq. 2 HC. triang. bicomposit.
B . H . C

Bc. Hc+HCq. 2HqC
2HCq. HqC+Cc.

Bc . Hc+3HCq. 3HqC+Cc. tri composit.
B . H . . C

Bqq. Hqq+3HqCq . 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq . HcC+3HCc.

Bqq . Hqq+6HqCq+Cqq . 4HcC+4HCc.
B . H . C (quadricomp.
&c.

Exempl. Reg. II. Hh. Bb-Cc. Bc+Cb.

H . B . C . trianguli simpli.
H . B . C .

Hq. Bq-Cq. 2BC: triang. bicomposit.
H . B . C.

Hc . Bc-BCq . 2BqC
—2BCq. BqC-Cc

Hc . Bc-3BCq . 3BqC-Cc: tri-composit.
H . B . C

Hqq . Bqq-3BqCq . 3BcC-BCc
Cqq-3BqCq. BcC-3BCc

Hqq . Bqq-6BqCq+Cqq . 4BcC—4BCc.
H . B . C (quadri comp.
&c.

CAP.

CAP. XVII.

Alia tabulæ posterioris in Cap. 12. *inspectio, quoad Æquationes.*

1. A Binomia radice A+E, potestatum species omnes sunt affirmatæ. A Residuo verò potestatū species omnes sunt alternatim negatæ, ut Q: A-E: est Aq--2AE+Eq. Et C: A-E: est Ac -3AqE+3AEq-Ec. Et QQ: A-E: est Aqq-4AcE+ 6AqEq-4AEc+Eqq. &c. Adeò ut si potestatis cujusvis species alternatim sumptæ,in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum, ac Residuorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque constitutio.

2. Quare nominum Binomii,vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ nominum radicis. scil. Ac+3AEq mi 3AqE+Ec, vel Ac+3AEq-3AqE-Ec,est C: A-E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Residui cujusq; differentia, est homogenea potestas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. scil.Q: Ac+3AEq: mi Q: 3AqE+Ec est C: Aq-Eq.

Nam per exempl. Reg. I, in 14, Cap. XVI, si cogitetur A hypotenusa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq-Eq quadratum basis; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Hc+3HCq: mi Q: 3HqC+Cc:=C: Bq:= Q:Bc: ergo.

4. At si species in nominibus aggregatæ, ipsæ etiam alternatim adfirmentur, & negentur:

Qua-

Quadratorum è nominibus ſumma, eſt homogenea poteſtas ſummæ quadratorum è nominibus radicis. Scil. Q: Ac-3AEq.pl. Q: 3AqE-Ec: eſt C: Aq+Eq.

Nam per exempl. Reg. II, in 14, Cap. XVI, ſi cogitetur A baſis trianguli rectanguli ; & E cathetus ; & Aq+Eq quadratum hypotenuſæ ; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc:=C:Hq:=Q: Hc. ergo

5. Omnes cujuſque ordinis intermediæ ſpecies, ſunt etiam poteſtates mediorum inter A & E proportionalium. ſcil. inter Ac & Ec, ſunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi ſunt ex M & N. Quare A, √c AqE, √cAEq, E, ſunt continuè proportionales : nempe A, M, N, E. Nam AqE=AMN =Mc: & AEq=MNE=Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E : ut ſi velis quinque medios proportionales, poteſtates erunt [6] ſive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæſitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqqEq, √ccAcEc, √ccAqEqq, √cc AEqc, E, ∸

6. Omnis media ſpecies in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis poteſtatibus, quarum Indices ſimul, æquales ſunt Indici ejuſdem generis : mediæ autem ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium : & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil. AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq in

in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia: & ab Eqc ſecunda.

Conſect. Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ poteſtates quamlibet (inventis omnibus mediis inter poteſtates nominum extremas) conſtruere. Ut in exemplo, ſi radicis Binomiæ A+√Æ quæratur Quadrato Cubus:

erit Aqc+		Aqc
10 ÆAc+	Ac Aqq	5√ÆAqcc
5 ÆqA plus	A Aq	10ÆAc
5 √ÆAqcc+	√Æ	10√ÆcAqq
10√ÆcAqq+	Æ √Æc	5ÆqA
√Æqc: Quod	Æq	√Æqc

Binomium eſt Quadrato-Cubicum.

7. Si ſpecies aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media ſpecies collateralis, in ordine alternè ſequente, atq; eadem numero à ſuis extremis. Ut Ac×Æ, eſt AqqE, quæ prima eſt ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE×Æ, eſt Aqq Eq, quæ ab Acc ſecunda eſt, & ab Ecc quarta. Et ſimiliter de reliquis.

8. Si ſpecies aliqua multiplicetur per A--E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas ſpecies ordinis ſequentis utrinque proximas. Ut AcX=Aqq−AcE. AqEX =AcE−AqEq. AEqX=AqEq—AEc. EcX= AEc—Eqq. Quare

Si omnes cujuſvis ordinis ſpecies multiplicentur per X, producetur differentia duarum poteſtatum extremarum ordinis proximi ſuperioris. Ut ex Ac+AqE+AEq+Ec, ductus in X, fiet Aqq-Eqq.

9. In ordinibus Indicum imparium (l,c,qc, &c.)

&c.) ſumma duarum extremarum poteſtatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c.) differentia earundem; fit ex A+E ducta in ſingulas ſpecies ordinis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut Ac+Ec, fit ex Aq—AE+Eq, ductis in A+E. Item Aqq-Eqq, fit ex Ac-AqE+AEq-Ec, ductis in A+E.

10. Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipſis factæ erunt etiam contrariæ. Ut Aq -2AE+Eq ductæ in A-E, fient Ac--3AqE+3AEq --Ec. At vero eædem ductæ in --A+E, fient --Ac+3AqE--3AEq+Ec.

11 Unciæ ſive numeri ſpeciebus præfixi, ſunt figuræ numerariæ. Nam omnes ſub A & E, ſunt radices. Omnes ſub Aq & Eq, ſunt triangulares. Omnes ſub Ac & Ec, ſunt pyramidales. Omnes ſub Aqq & Eqq, ſunt triangulo-triangulares. Omnes ſub Aqc & Eqc, ſunt triangulo-pyramidales. Omnes ſub Acc & Ecc, ſunt pyramidi-pyramidales, &c.

12. Si radix tribus cōſtet nominibus, A, E, I, Quadratum { Aq, 2AE, Eq, 2EI, Iq, 2AI, } Cubus { Ac, Ec, Ic, 3AqE, 3AEq, 3AqI, 3AIq, 3EqI, 3EIq, 6AEI.

Et nota quòd ſi in aliqua ſpecie, numerus laterum negatorum ſit impar; ſpecies illa erit negata. Ut Q: A+E-I: =Aq+2AE+Eq-2EI+Iq -2AI. Et C: A+E-I: =Ac+3AqE+3AEq+Ec -3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI.

CAP.

CAP. XVIII.

Penus Analytica.

1. EX primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud ſunt, quàm vel terminorum expoſitiones, vel ſimplices affectiones (quales ſunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z - E = \frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X + E = \frac{1}{2}Z$: & reliquæ ejuſmodi) innumeri aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Tranſpoſitionem, atque Interpretationem: ſumendo id quod alteri inventum eſt æquale, loco ejus cui æquatur. Quæ quidam Analytica ſupellex eſt, non minùs pretioſa, quàm copioſa. Quarum ergo præcipuas aliquot, & maximè neceſſarias, adſcribam: plures Analytices ſtudioſus pro ſuo exercitio excogitabit. Et ubicunque ſive in Arithmetica, ſive in Geometria, ſive in alia aliqua arte, inciderit in magnitudinem aliquam, cui alteri æqualis eſſe intelligitur; æqualitatem illam quibuſcunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, diſcutiet, variabit, ut novum inde artis inſtrumentum inveniat: quod poſtea in penu ſervabit: & ubicunque poterit in uſum proferet, ad artis ſubſidium atque augmentum.

2. $Q{:}1{:} = 9Q{:}\frac{1}{3}$. &c.	$C{:}1{:} = 27\,C{:}\frac{1}{3}$: &c.
$Q{:}1{:} = \frac{1}{9}Q{:}3$. &c.	$C{:}1{:} = \frac{1}{27}C{:}3$: &c.
$Q{:}1{:} = \frac{9}{4}Q{:}\frac{2}{3}$ &c.	$C{:}1{:} = \frac{27}{8}C{:}\frac{2}{3}$: &c.
$\frac{2}{5}Q{:}1{:} = \frac{2}{5}\times\frac{9}{4}Q{:}\frac{2}{3}$: &c.	$\frac{2}{5}C{:}1{:} = \frac{2}{5}\times\frac{27}{8}C{:}\frac{2}{3}$: &c.
$\frac{2}{3}Q{:}4{:} = \frac{2\times16}{3}Q{:}1$: &c.	$\frac{2}{3}C{:}4{:} = \frac{2\times64}{3}C{:}1$: &c

3. Si

3. Si linea bisecetur, & secùs; rectangulum sub segmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum bisegmenti atque intersegmenti: hoc est semisummæ atque semidifferentiæ segmentorum. 5 e 2. $AE = Q{:}\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}E{:}$ mi $Q{:}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}E{:}$ Et hoc est, $AE = \tfrac{1}{4}Zq - \tfrac{1}{4}Xq$.

4. Si linea bisecta augeatur; rectangulum sub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum bisegmenti aucti, atque bisegmenti. 6 e 2. $A+E$ in $E = Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:}$ mi $Q{:}\tfrac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A = Q{:}\tfrac{1}{2}E+A{:}$ mi $Q{:}\tfrac{1}{2}E$.

Datis igitur summa trium ∺ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Sic

$\sqrt{u}{:}Aq+AE+Eq-\tfrac{3}{4}Aq{:}$ mi $\tfrac{1}{2}A = E$.

$\sqrt{u}{:}Aq+AE+Eq-\tfrac{3}{4}Eq{:}$ mi $\tfrac{1}{2}E = A$.

Nam $Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:} = \tfrac{1}{4}Aq+AE+Eq$.

Et $Q{:}\tfrac{1}{2}E+A{:} = Aq+AE+\tfrac{1}{4}Eq$.

5. Si linea secetur utcunque; summa quadratorum totius, & unius segmenti, æquatur aggregato quadrati alterius segmenti, & duplicis rectanguli sub tota & priore segmento, 7 e 2. $Zq+Aq = 2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq = 2ZE+Aq$. Quare $2ZA+Eq-Aq = Zq = 2ZE+Aq-Eq$.

6. Si linea utcunque secta, augeatur alterutro segmento; Quadruplex rectangulum sub secta, & segmento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius segmenti. 8 e 2.

$Q{:}Z+E{:}-Aq = 4ZE$. Et $Q{:}Z+A{:}-Eq = 4ZA$.

7. Si linea bisecetur, & secus; summa qua-

quadratorum ſegmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti, & interſegmenti 9 e 2. $Aq + Eq = 2Q{:}\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E{:} + 2Q{:}\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E.$

8. Si linea biſecta augeatur; ſumma quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti aucti, & biſegmenti. 10 e 2.

$$Q{:}A+E{:} + Eq = 2Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:} + 2Q{:}\tfrac{1}{2}A.$$
$$Q{:}A+E{:} + Aq = 2Q{:}\tfrac{1}{2}E+A{:} + 2Q{:}\tfrac{1}{2}E.$$

9. $Aq = ZA - AE = XA + AE = \frac{1}{2}ZA + \frac{1}{2}XA = Q{:}Z-E{:} = Q{:}E+X{:} = Z - Eq = Eq + X.$
Et $Eq = ZE - AE = AE - XE = \frac{1}{2}ZE - \frac{1}{2}XE = Q{:}Z-A{:} = Q{:}A-X{:} = Z - Aq = Aq - X.$

10. $Æ = \frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = ZA - Aq = ZE - Eq = Aq - XA = Eq + XE = \frac{1}{2}Zq - \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}Xq = \frac{1}{2}ZA - \frac{1}{2}XA = \frac{1}{2}ZE + \frac{1}{2}XE.$

11. $Z = Aq + Eq = Zq - 2AE = 2AE + Xq = ZE + XA = ZA - XE = 2Q{:}\frac{1}{2}Z{:} + 2Q{:}\frac{1}{2}Z - E{:} = Q{:}A - 2N{:} + Q{:}2M - E{:} = \frac{1}{2}Zq + \frac{1}{2}Xq = 2Q{:}\frac{1}{2}Z{:} + 2Q{:}\frac{1}{2}X{:}$

Conſectarium ex his duabus ultimis æquationibus: Si magnitudo conſtet ex quadratis binarum magnitudinum; ejus etiam duplum conſtabit ex duobus quadratis, Summæ ſcil. & Differentiæ: Et dimidium ejus conſtabit ex duobus quadratis, Semiſummæ ſcil. & Semidifferentiæ.

Et $X = Aq - Eq = ZX = 2ZA - Zq = Zq - 2ZE = 2XA - Xq = 2XE + Xq = ZA - ZE = XA + XE = Zq - 2ZE = ZA + XE - 2Æ = XA + 2Æ - ZE = Q{:}A + 2N{:}$ mi $Q{:}2M + E.$

12. Q:

12. $Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:} = Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E{:}+\text{Æ}.$ } Nam $\frac{1}{4}Zq$
Et $Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E{:} = Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:}-\text{Æ}.$ } $= \frac{1}{4}Xq+\text{Æ}.$

13. $2A+2E \text{ in } A = 2Aq+2AE = Zq+X.$
Et $2A-2E \text{ in } A = 2Aq-2AE = X.+Xq.$
Et $2A+2E \text{ in } E = 2AE+2Eq = Zq-X.$
Et $2A-2E \text{ in } E = 2AE-2Eq = X.-Xq.$

14. $X.q = ZqXq = Z+2\text{Æ} \text{ in } Z-2\text{Æ} = Zq-4AqEq$

15. $Z\text{Æ} = AqE+AEq.$ Et $X\text{Æ} = AqE-AEq.$
Et $Z\text{Æ} = AcE+AEc.$ Et $X.\text{Æ} = AcE-AEc.$
Quare $\mathcal{Z}+3Z\text{Æ} = Zc.$ Et $\mathcal{X}-3X\text{Æ} = Xc.$
Et $ZZ = \mathcal{Z}+Z\text{Æ} = Ac+AqE+AEq+Ec.$
Et $ZX = \mathcal{X}-X\text{Æ} = Ac-AqE+AEq-Ec.$
Et $X.Z = \mathcal{X}+X\text{Æ} = Ac+AqE-AEq-Ec.$
Et $X.X = \mathcal{Z}-Z\text{Æ} = Ac-AqE-AEq+Ec.$
Hinc $ZZ+X.X = 2\mathcal{Z}.$ Et $X.Z+ZX = 2\mathcal{X}.$
Et $ZZ-X.X = 2Z\text{Æ}.$ Et $X.Z-ZX = 2X\text{Æ}.$

16. Si in circulo ſit $7.22::\delta.\pi::113.355$: erit
$\delta.\pi::2R.P$: periph. Et $\pi.\delta::\frac{1}{2}P.R$: ſemidiam.
$\delta.\pi::Rq.$ Circul. Et $\pi.\delta::\frac{1}{4}Pq.$ Circul.
$\delta.\pi::2Rc.$ Cylind. Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{4}Pc.$ Cylind.
$\delta.\pi::\frac{4}{3}Rc.$ Sphær. Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{6}Pc.$ Sphær.
$\delta.\pi::\frac{2}{3}Rc.$ Con. Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{12}Pc.$ Con.

17. Ad hæc oportet futurum Analyſtam Geometrica iſta, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor. 1. Triangula ſunt æqualia: Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito, modo angulus reliquo lateri oppoſitus ſit homogeneus; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4, 8, 26, e 1.

Theor.

Theor. 2. Triangula plana ſunt ſimilia: Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4, 5, 6, 7, e 6.

Theor. 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19, e 1.

Theor. 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28, 29, 30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor. 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis: Et externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor. 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor. 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16, 18, 19, e 3.

Theor. 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor. 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper æqualibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

Theor. 10. Angulus in ſemicirculo eſt rectus 31 e 3.

Theor. 11. Si è puncto in peripheria circuli

culi ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera secans: anguli inter ipsas comprehensi mensura, æqualis erit semiperipheriæ abscissæ. pro 32 e 3.

Theor. 12. Triangula, sive parallelogramma, æquialta, vel inter easdem parallelas, sunt ut bases. 35, 36, 37, 38, e 1. & 1 e 6.

Theor. 13. Recta bisecans angulum trianguli, secat basem ratione crurum 3 e 6.

Theor. 14 Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: sic ut A sit angulus rectus: & BA Basis: & CA Cathetus: BC Hypotenusa.

Theor. 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo recto in Hypotenusã, dividit triangulum in duo triangula, tum toti, tum sibi ipsis similia. 8 e 6.

BC. BA. CA:: BA. BP. AP:: CA. AP. CP.
Hypotenusæ Bases Catheti.

Unde sequitur.

1° Perpendicularem esse mediam proportionalem inter segmenta Hypotenusæ. Ideoque Quadratum perpendicularis æquale esse rectangulo sub segmentis.

Scil. $\div\!\!\div$ BP, AP, CP. Et APq=BP×CP.

2° Basem esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Basi conterminum. Scil. $\div\!\!\div$ BC, BA, BP.

3° Cathetum esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Catheto conterminum. Scil. $\div\!\!\div$ BC, CA, CP.

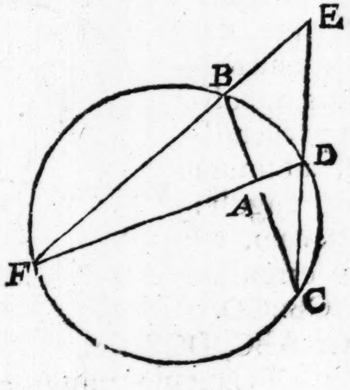
4° Ba-

4° Basis & Catheti quadrata, esse ut segmenta Hypotenusæ contermina. BP. CP:: BAq. CAq. Nam BP. CP:: BCxBP. BCxCP::BAq. CAq.

5° Quadratum Hypotenusæ æquari quadratis Basis & Catheti simul. BCq=BAq+CAq. Nam BCq=BCxBP+BCxCP=BAq+CAq.

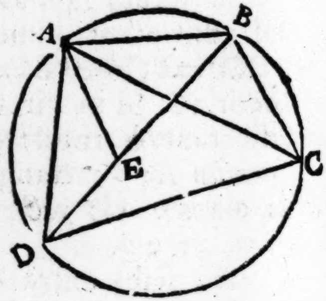
Theor.16. Si in circulo duæ rectæ inscriptæ sese mutuò intersecent intra circulum (in puncto A;) rectangulum sub segmentis unius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 35 e 3.

Si verò sese extra circulum intersecent (in puncto E) Rectangula sub segmentis utriusque à puncto ad convexum & concavum circuli, sunt æqualia. 36 & 37 e 3. Dico primò AB × AC=ADxAF. Nam tri. BAF, DAC sim. Dico secundo EBxEF=EDxEC. Nam tri. BEC, BEF sim.



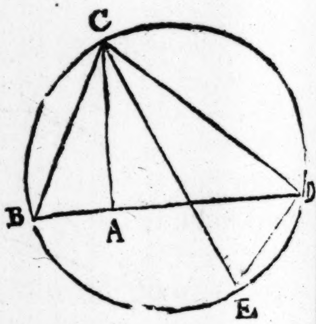
Theor.17.

Theor. 17. Quadrilateri in circulo inſcripti anguli interiores oppoſiti ſimul æquantur duobus rectis, 22 e 3. Et ſi ducantur duo diagonii, rectangulum ſub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis ſub lateribus oppoſitis. Dico AC×BD = AB×CD + AD×BC. Nam ſumpto ang. DAE = CAB; erunt tri. ACB, ADE ſim. & ADC, AEB ſim.



$$\text{Quare}\left\{\begin{array}{l}\text{AC. CB:: AD. DE}\\ \text{AC. CD:: AB. BE}\end{array}\right\}\text{ergo.}$$

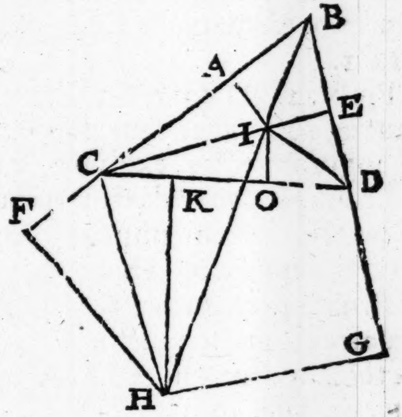
Theor. 18. Si ex angulo quovis trianguli circulo inſcripti, demittatur perpendicularis in latus oppoſitum: Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejuſdem anguli: ſic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB::CD. CE. Nam tri. ABC, DCE ſim.



Theor. 19. Triangula unum angulum æqualem habentia, rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor.

Theor. 20. Si ſemiſumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa ſemiſumma, continuè inter ſe multiplicentur: Vel aliter, ſi trianguli quovis latere ſumpto pro baſe, & reliquis duobus pro cruribus; Rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia ſummæ crurum & baſis, ducatur in rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum: Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli. Eſto triangulum BCD, cujus crura ſint BC & BD, & baſis CD. Biſecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur, IA, IE,



IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare ſi cruri BC adjungantur in directum, CF=DE;

erit $BF = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$:

Et $BA = BF - CD = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CD$:

Et $AC = BF - BD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD$:

Et $CF = BF - BC = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD$. Menſuratis $BG = BF$: & $CK = CF$: ducantur perpendiculares FH, GH, KH: Et protrahatur BI in H.

Quia

Quia ang. FCK+FHK=2Rect=FCK+ACO. Et ang. ACO+AIO=2 Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri. CFH, IAC sim. Sunt etiam tri. BAI, BFH sim. His expositis, Dico Quadratum areæ trianguli, nempe BFq×IAq=BF×BA×AC×CF.

$\left.\begin{array}{l}\text{Nam IA. BA::FH.BF}\\ \text{Et IA.AC::CF.FH}\end{array}\right\}$ propter tri: sim.

Quare per multipl. IAq×BF=BA×AC×CF.

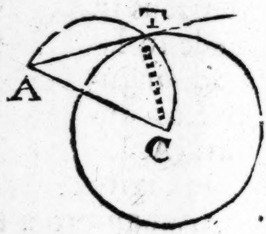
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl. 1. A dato puncto, vel ad datam distantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl. 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos rectos, excitare. 11 e 1.

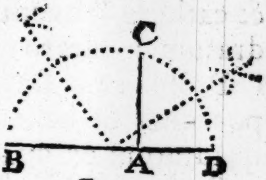
Probl. 3. Super datam rectam lineam, à dato extra ipsam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12 e 1.

Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quæ ipsum circulum tangat. 17 e 3.

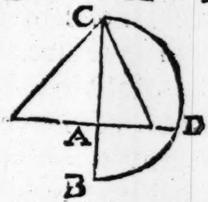


Probl. 5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl. 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC adinvenire. 13 e 6.



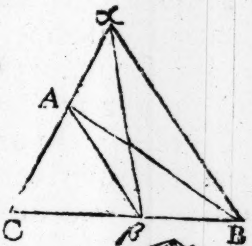
Probl. 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.



Probl. 8. Dato triangulo, cujus altitudo eſt AC, & ſemibaſis AB, æquale quadratum ADq, conſtituere.

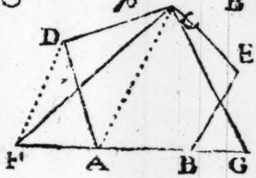
Probl. 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, ſtatuere. 14 e 6.

Probl. 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem conſtituere.



Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppoſitos linea A β & α B, ductæ, ſint parallelæ.

Probl. 11. Dato polygono æquale triangulum conſtituere.



Probl. 12. Datis tribus punctis, non in directum poſitis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl. 13. Datis trianguli rectanguli baſe & catheto, invenire hypotenuſam; vel quadratum quadrato addere.

Probl. 14. Datis trianguli rectanguli hypotenuſa & baſe, invenire cathetum; vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl. 15. Binarum figurarum ſimilium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis. Aq. Mq:: A. E.

Probl. 16. Datæ figuræ ſimilem figuram, in data ratione conſtituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipſius, & latus ſimile. R. √RS:: A. M. Ratio fig. ſit R. S.

Probl. 17. In dato circulo Hexagonum ordinatum inſcribere. 15 e 4.

Probl. 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inſcribere. Secetur ſemidiameter circuli ſecundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl. 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inſcribere. Quæratur Hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus Baſis ſit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

CAP. XIX.

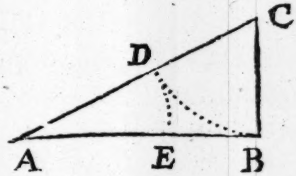
Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibuſque ſolvendis. Ad quem quaſi ſcopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

Probl. I. INventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B ſecetur ſic ut rectangulum ſub tota B, & minore ſegmento, æquetur quadrato majoris ſegmenti.

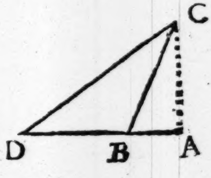
Po-

Ponatur majus ſegmentum A: minus erit B-A. ducatur B-A in B: fietque $Bq-BA=Aq$: vel $Aq+BA.=Bq$. Quare $\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$:-$\frac{1}{2}B=$ A, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur ſic: Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipſius quadrans: & è latere quadrato ſummæ; tollatur ſemis lineæ datæ: reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè autem conſtruetur, ſic, Fiat $AB=B$: eique ad angulos rectos ſtatuatur $BC=\frac{1}{2}B$: & ducatur Hypotenuſa AC: erit $AC=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$. Abſcindatur $CD=BC$. Eritque reſiduum $AD=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$:-$\frac{1}{2}B$. Deniq; menſuretur $AE=AD$, pro majore ſegmento.



Prob. III. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Baſis obtuſi anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit obtuſus: hujus Baſis eſt DC: & latera BD, BC. Hîc $BCq-BAq=CAq=DCq$ (-DAq, per 4 e 2)-$BDq-2BD\times BA-BAq$. Quare $BCq+BDq=DCq-2BD\times BA$.

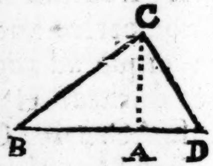


Quod theorema verbis enuntiatur, ſic: In amblygoniis triangulis, quadratum lateris ſubtendentis obtuſum angulum, excedit ſummam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo ſub uno late-

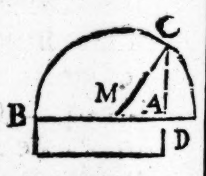
 rum

rum circa obtuſum angulum, & ſegmento ipſius (continuati) inter obtuſum angulum & perpendiculum.

Probl. III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Baſis acuti anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit acutus. hujus Baſis eſt DC: & latera BC, BD. Hic BCq--BAq=CAq=DCq (-DAq, per 7 e 2) --BDq + 2BD x BA -BAq. Quare BCq+BDq=DCq + 2BDxBA. (Eodem prorſus modo procederet Demonſtratio, ſi D ponatur inter B & A.) In verbis, ſic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris ſubtendentis acutum angulum, minus eſt quam ſumma quadratorum laterum, &c. (2BD x BA -BAq+DAq=BDq, 7 e 2)



Probl. IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo ABxAD. Eſto AB+AD=2BM. Quare AB+AD ſecetur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, ABxAD=BMq--AMq. Jam ſupponantur ACq=ABxAD: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenuſa CM=BM ſemiſummæ laterum & baſis AM ſemidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæſiti, per 48 e 1.



Inventio areæ Trianguli plani.

Probl. V. Attulit ad me amicus quidam meus,

meus, vir doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonstratione munirem, postulavit. Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapsi sunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iisdem literis.

In triangulo plano cujus latera sunt A,E,B; $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{8}BqEq-\frac{1}{16}Eqq \\ \frac{1}{8}EqAq-\frac{1}{16}Aqq \\ \frac{1}{8}AqBq-\frac{1}{16}Bqq \end{array}\right\}$ æquātur quadrato areæ trianguli.

Postquam aliquamdiu mecum cogitassem, occurrit mihi 17, c 18. Theor. 20, quod commodissimum huic nodo solvendo duxi. Nam si trianguli duo crura sint A, E; & basis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq+\frac{1}{8}AqBq+\frac{1}{8}EqBq-\frac{1}{16}Aqq-\frac{1}{16}Eqq-\frac{1}{16}Bqq$. Quod est ipsum Theorema propositum.

Atque hinc non solum postulato satisfeci; sed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui.

Nam quia $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$.

Et $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B$.

Et quia $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$.

Et $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X$.

Erit $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$.

Et $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X=\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq$.

Liquet igitur primo, $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq=Q$: areæ trianguli. In verbis sic, Si quadrans differentiæ quadratorum summæ crurum & basis, ducatur in quadrantem differentiæ qua-

dratorum basis & differentiæ crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde quia $\frac{1}{4}$Zq-$\frac{1}{4}$Bq in $\frac{1}{4}$Bq-$\frac{1}{4}$Xq$=\frac{1}{16}$ZqBq+$\frac{1}{16}$BqXq-$\frac{1}{16}$Bqq-$\frac{1}{16}$ZqXq: Liquet secundo, Zq+Xq-Bq in $\frac{1}{16}$Bq, mi $\frac{1}{16}$ZqXq$=$Q: Areæ trianguli.

Item quia Zq+Xq$=$2Ƶ, per 11, c. 18: Et ZqXq $=$X,q, per 14, c. 18: Liquet tertiò 2Ƶ-Bq in $\frac{1}{16}$Bq, mi Q: $\frac{1}{4}$X.$=$Q: Areæ trianguli.

Denique ex his cōparatis erit 4° $\left\{ \frac{2ƵBq-Bqq-X,q}{16} \right.$ $=$Q: Areæ tri.

Hæc posteriora Theoremata verbis facilè enuntiantur.

Probl. VI. Problematum circa Progressionem Arithmeticam solutio in viginti Propositionibus. Symbola verborum hæc sint: α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z summa omnium terminorum. Est igitur T—1 numerus differentiarum: ideoque TX--X$=\omega$-α, summa differentiarum.

Datis tribus ex quinq; illis α, ω, T, X, Z, invenire duo reliqua per viginti propositiones sequentes (tot enim sunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propositi.
α, ω, T	Z & X	1 & 2
α, ω, X	T & Z	3 & 4
α, ω, Z	T & X	5 & 6
α, T, X	ω & Z	7 & 8
α, T, Z	ω & X	9 & 10

Datis

Datis	Quæruntur	Per Propoſition.
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, X, Z	α & ω	19 & 20

Prop. I. $T\omega + T\alpha = 2Z$.

II. $\frac{\omega - \alpha}{T - 1} = X$.

III. $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$. per 2.

IV. $\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$. per 1. 3.

V. $\frac{2Z}{\omega + \alpha} = T$. per 1.

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z - \omega - \alpha} = X$. per 4.

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2.

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $T = 2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} = \omega$. per 1.

X. $\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$. per 2. 8.

XI. $\sqrt{u}:\alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX: -\frac{1}{2}X = \omega$. per 4.

XII. $\sqrt{u}:\frac{\alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX}{Xq}: - \frac{\alpha + \frac{1}{2}X}{X} = T$. per 8.

XIII. $\omega + X - TX = \alpha$. per 7.

XIV. $2\omega + X - TX \text{ in } T = 2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T} - \omega = \alpha$. per 9.

XVI. $\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = X$. per 14.

XVII. $\frac{1}{2}X \pm \sqrt{u}:\omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX: = \alpha$. per 4.
prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XVIII. $\frac{\omega + \frac{1}{2}X}{X} \mp \sqrt{u}:\frac{\omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX}{Xq}: = T$. per 14.
prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XIX. $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$. per 10.

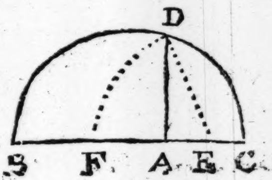
XX. $\frac{2Z}{2T} + \frac{TX}{2} - \frac{X}{2} = \omega$. per 16.

Probl. VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; Data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R.S::AB.AC: qui quartus sit proportionalis: tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit AB-A: quod ductum in AB, dabit rectangulum ABq-AB×A. Erit igitur AB.AC::ABq--AB×A. Aq. Ideoque per 3 cap. 6, ABq×AC-AB×AC×A=AB×Aq. Et divisis omnibus per AB, erit AB×AC−AC×A=Aq: vel Aq+AC×A=AB×AC. Et per 9 cap. 16, invenitur $\sqrt{}$u: $\frac{1}{4}$ACq+AB×AC:--$\frac{1}{2}$AC=A.

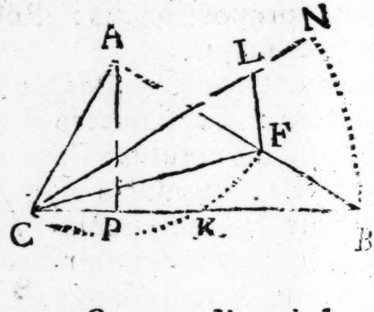
Hoc theorema inventum, verbis sic enunciatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculum in D. tum bisecta AC in E, mensuretur



EF=ED. Dico lineam AB ſic ſecari in puncto F, ut ſit R. S :: AB×BF. AFq. Nam AC×AF+AC×BF=AC×AB=ADq=CF×AF, per 6 e 2, =AC×AF+AFq. Quare AC×BF=AFq. Atqui AB. AC::AB×BF. AC×BF. Ergo,

Probl. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP = \frac{BC\text{-}BK.}{2}$ Quia eſt BC. CA::CA. $\frac{BC\text{-}BK}{2}$ erit $\frac{BCq\text{-}BC \times BK}{2} = CAq$: vel $BCq - BK \times BC = 2CAq$. Quare per 9 c 16, $\sqrt{q}:\frac{1}{4}BKq + 2CAq: + \frac{1}{2}BK = BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateri dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemidifferentia: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.



Geo-

Geometricè sic. Sumpta $AF=AC$; Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL=\frac{BK}{2}$ & extendatur CL ad N, ut $LN=\frac{1}{2}BK$. Erit $CN=BC$. Quare inscribatur circulo $CK=CN\text{-}BK$: & producatur, &c. Nam $CFq=2CAq$. & $CLq=2CAq+\frac{1}{4}BKq$. Ergo.

Si verò detur majus latus BA: hujusmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq+2BAq:-\frac{1}{2}BK=BC$. sumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

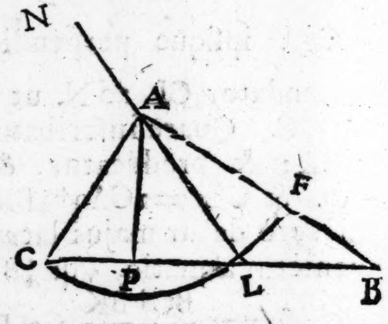
Et modus geometricus priori non absimilis.

Probl. IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. $2BA\times AF+BFq=BAq+AFq$; Ideoque $BFq=$ ($ABq+AFq$, hoc est) $BCq-(BA\times 2CA$. hoc est) $BC\times 2AP$, quia $BC.\ CA :: BA.\ AP$. Erit $BCq-2AP\times BC=BFq$. Quare per 9 c 16 $\sqrt{q}: APq+BFq:+AP=BC$.

Enun-

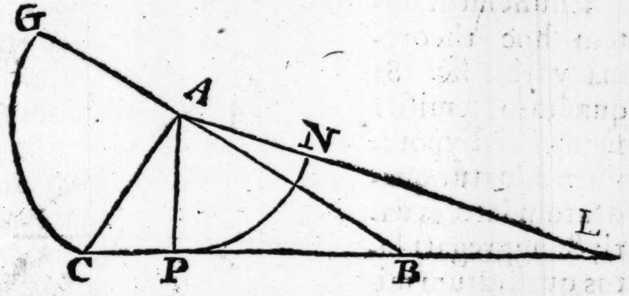
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipsa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenusæ.



Geometricè sic. Fiat PL=BF. Et extendatur LA ad N, ut AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC describatur semicirclus; in quo statuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl. X. Datis summa laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam, AP: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq=(BAq+GAq, hoc est)BCq+ (2BA×CA, hoc est)2AP×BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq+2AP×BC=BGq. quare per 9 c 16, √q: APq+BGq:-AP=BC.



Enunciatur autem hoc theorema ſic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum ſummæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipſa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenuſæ.

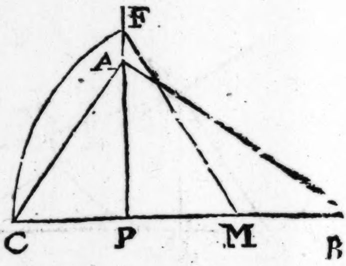
Geometricè ſic. Fiat PL=BG & ducatur AL: ex qua abſcindatur AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus, &c.

Probl. XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno ſegmento hypotenuſæ BP: invenire tum alterum ſegmentum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BP+CP. CA::CA. CP. Erit BP×CP + CPq=CAq. quare per 9 c 16, $\sqrt{}$q: $\frac{1}{4}$BPq+CAq:—$\frac{1}{2}$BP=CP.

Enun-

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse; linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.



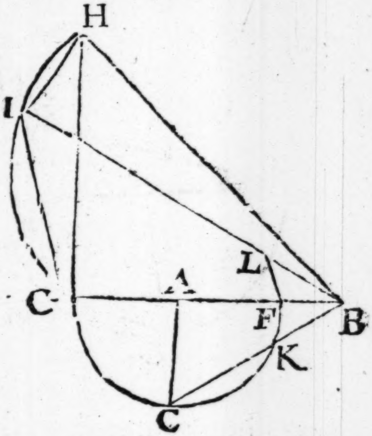
Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF=CA, & bisecta BP in M, ducatur MF : cui mensuretur æqualis MC. Inventum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus : in quo inscribantur CA, & BA.

Probl. XII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum, BG : invenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG. BK :: BC. BF: est etiam BGq. BKq::(BCq, hoc est) BAq+CAq. BFq. Item 2BGq-BKq. BKq:: (2BAq+2CAq—BFq hoc est) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq+2CAq=BGq+BFq. quare √q: 2BGq—BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enunciatur autem hoc Theorema verbis sic: Si

Si è quadrato ſũmæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit,ut latus quadratum reliqui, ad ſummam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad differentiam laterum, & ſic ſumma laterum ad hypotenuſam.

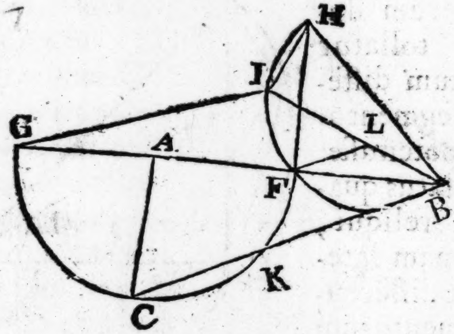


Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH=BG. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculius: in quo inſcribatur HI=BK: & ducatur BI. Eſt igitur BI=√q : 2BGq —BKq. Fiat etiam BL=BK. Ducatur GI : eique parallela LF. Ergo inventa eſt BF differentia laterum.

Probl.XIII.Datis trianguli rectanguli differentia ſegmentorum hypotenuſæ BK, & differentia laterum BF : invenire tum ſummam laterũ,tum hypotenuſam,tum ipſum triangulũ.

Puta factum eſſe quod poſtulatur : ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BF. BK:: BC. BG : eſt etiam BFq. BKq:: (BCq, hoc eſt) BAq+CAq. BGq. Item 2BFq—BKq. BKq:: (2BAq+2CAq—BGq,hoc eſt) BFq.BGq. Nam per 8 c 18, 2BAq + 2CAq=BGq+BFq. Quare √q: 2BFq—BKq. BF :: BK. BG :: BF. BC.

Enun-



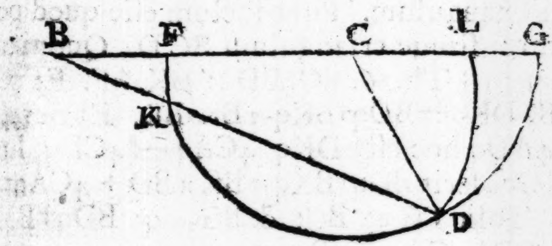
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad summam laterum: & sic differentia laterum, ad hypotenusam.

Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH=BF. tum diametro BH describatur semicirculus, in quo inscribatur BI=BK: & ducatur HI. Est igitur HI=√q: 2BFq —BKq. Fiat BL=HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa est BG summa laterū.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuscunq; differentia laterum FB, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum. Et primò sit excessus penes basem. Puta factum esse quod postulatur; sitque triangulum LCD.

Quo-

Quoniã est FB. BK::BD. $\frac{BK \times BD}{BF} = BG$, per 17.c. 18, Th. 16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{BF} = FG$: & $\frac{BK \times BD - BFq}{2FB} = CF$. Adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF} = BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL}{2BF}$. Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK.\ 2CL + BF :: BF.\ BD :: BK.\ BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam segmentorum basis, est ad aggregatum differentiæ inter majus latus & basim duplicatæ, & differentiæ laterum; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterũ.

Geometrica praxis facilior est, quàm ut necesse sit apponi.

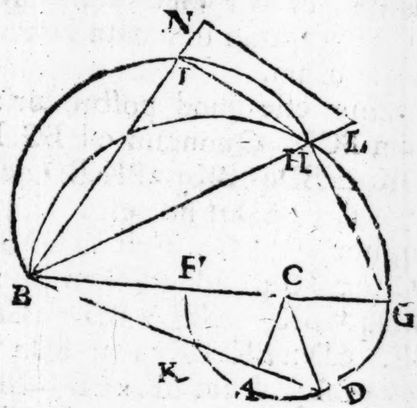
Si verò excessus fuerit penes majus latus: theorema erit, $BK - 2BF.\ 2CL - BF :: BF.\ BD :: BK.\ BG$.

Hujus

Hujus theorematis investigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL; postulatur invenire tum basem, tum differentiam laterum, solutionem, omitto; ut habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

Probl. XV. Datis trianguli plani cujuscunque summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th. 16. $BG. BD :: BK. BF$. Et per 5 c 18, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$. Et per 47 e 1 ($4ADq$ hoc est) $DKq + 4CAq = (4CDq$, hoc est$)\ FGq$. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Tolle FG ex BG: & $BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq := BF$. Quare erit,
$BG. BD :: BK. BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \sqrt{q}: BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq$. Est igitur per 8 c 16, $Q: BGq - BK \times BD$, hoc est, $BGqq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BGq \times 4CAq$. Ideóque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq$. vel etiam, $BGq - BKq$ in $BDq = BGq - BKq - 4CAq$ in BGq. Ergo $\sqrt{q}: BGq - BKq.\ \sqrt{q}: BGq - BKq - 4CAq :: BG. BD :: BK. BF$.

Enun-



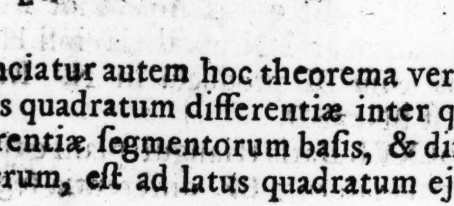
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro BG describatur semicirculus: in quo inscribatur GH=BK: & BH. Est igitur BH=√q: BGq—BKq. Rursus diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI=2CA: & BI. Est igitur BI=√q: BGq - BKq—4CAq. Fiat BL=BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN=BD.

Probl.XVI. Datis trianguli plani cujuscunq; differentia laterum BF, differentia segmentorum

rum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est $BG . BD :: BK . BF$. Et $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$, per 5 c 18. Et per 47 e 1, ($4ADq$, hoc est) $DKq + 4CAq = (4CDq$, hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Adde FG ad BF: Et $BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = BG$. Quare $BF . BD :: BK . BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Item $BK \times BD = BFq + \sqrt{q}: BFq \times BDq + BFq \times BKq - BFq \times 2BK \times BD + BFq \times 4CAq$. Est igitur Q: $BK \times BD - BFq$, hoc est, $BKq \times BDq - \underline{BFq \times 2BK \times BD} + BFqq = BFq \times BDq + BFq \times BKq - \underline{BFq \times 2BK \times BD} + BFq \times 4CAq$. Ideoque $BKq \times BDq - BFq \times BDq = BFq \times BKq - BFqq + BFq \times 4CAq$. vel etiam $BKq - BFq$ in $BDq = BKq - BFq + 4CAq$ in BFq. Ergo $\sqrt{q}: BKq - BFq . \sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq :: BF . BD :: BK . BG$.



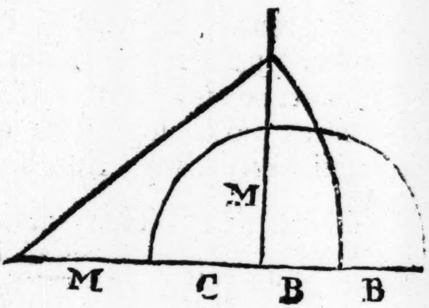
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentiæ laterum, est ad latus quadratum ejusdem diffe-

differentiæ auctæ quadrato perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur KH=BF: & BH. Est igitur BH=√q: BKq−BFq. Fiat BHL=BF: & HKI=2CA. Ducatur BI. Est igitur BI =√q: BKq−BFq+4CAq. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN=BD.

Probl. XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam B, & differentia inter cathetum & hypotenusam C: invenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit A—B. & Cathetus A—C. & per 47 e 1, Cathetus est √q: 2BA—Bq. Quare √q: 2BA—Bq: =A—C. Et 2BA−Bq=Aq—2CA + Cq. vel 2B + 2C in A mi Aq=Bq+Cq. Ergo per 9 c 16, B+C+√q: 2BC=A, hypotenusæ.



Enun-

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Aggregatum utriusque differentiæ (tum basis tum catheti) ab hypotenusa; unâ cum $\sqrt{q}$: duplicis rectanguli sub ipsis differentiis, æquatur hypotenusæ.

Geometricè sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B, B, & C Hac diametro fiat semicirculus. Et in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur $Mq = 2BC$. Mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro $M+C+B$ describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. Tum à puncto concursus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenusæ. Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

Probl. XVIII. Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrāmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus esse eo, quod ad dimidium applicatur. Prop. est 28 e 6.

In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo, R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipsis statuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A portio ablatitia erit AB-A. Fiat S. R :: AB-A

$\dfrac{AB \times R - R \times A}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti

Ducatur in A latus: eritque $\dfrac{AB \times R \times A - R \times Aq}{S} = C$

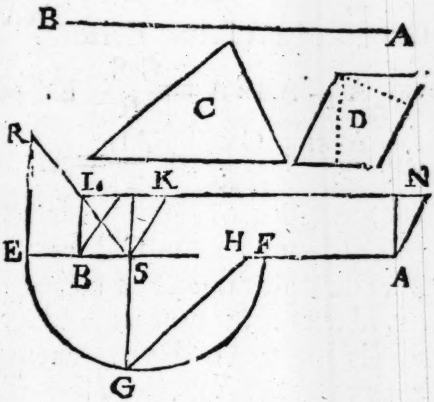
vel $AB \times A - Aq = \dfrac{C \times S.}{R}$ Et per 9, Cap. 1[illegible]

A

$$\frac{AB}{2} \pm \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R} := A.$$

Quod Theorema verbis enunciatur ſic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato ſemiſſis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem ſemiſſe, erit latus parallelogrammi quæſiti.

Geometricè ſic: Fiat ER $= \sqrt{q}C$. Tum R. S :: ER. ES. Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaq; SF $=$ ER, diametro EF deſcribatur ſemicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{C \times S}{R}$



Ex G puncto menſuretur GH $= \frac{1}{2}$AB $=$ HB: erit HS $= \sqrt{}: \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S.}{R}$ cui ſi adjungas HA $= \frac{1}{2}$AB; erit AS latus parallelogrammi quæſiti. Et BS $=$ AB-A portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergo parallelogrammum quæſitum eſt ASKN, factum ipſi D æquiangulum.

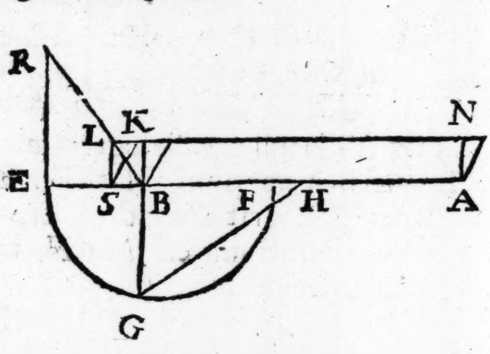
Probl.

Probl. XIX. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, Prop. est 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: Portio adjectitia erit A-AB. Fiat S.R::A-AB. $\frac{R \times A - AB \times R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti. Ducatur in A latus. Eritq; $\frac{R \times Aq - AB \times R \times A}{S} = C$. vel $Aq - AB \times A = \frac{C \times S.}{R}$ Et per 9. Cap. 16, $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R} : + \frac{AB}{2} = A.$

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D & factus per altitudinem dividatur: & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.



Geo-

Geometricè ſic. Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum R. S::ER. EB. Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque BF=ER, diametro EF deſcribatur ſemicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq = \frac{C \times S}{R}$. Eſto $BH = \frac{1}{2}AB$ $= AH$. Et ducatur $GH = \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R} := HS$: Eſt igitur AS=A lateri parallelogrammi quæſiti: Et BS=A-AB portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæſitum eſt, ASKN factum ipſi D æquiangulum.

Probl. XX. Datis trianguli plani cujuſcunq; duobus lateribus BC, BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus. Vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipſorum oppoſitum.

Eſto factum quod poſtulatur: ſitque triangulum BCD. Centro B, ſemidiametro BC, deſcribatur arcus CK: & perpendicularis CA. Eſt igitur KD differentia laterum: & AK ſimilis ſinui verſo anguli B. Nam Rad. svB::BK. AK. Eſtque $AK = \frac{BK \times svB}{Rad.}$. Eſt autem etiam $AK = BK \mp BA$: ut ex ſchematibus comparatis liquet.

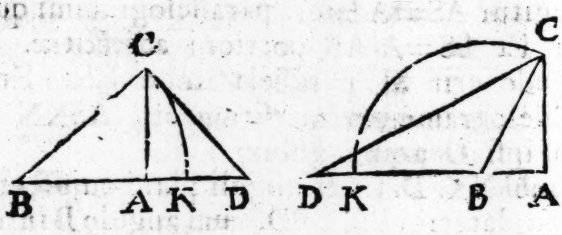
Et quia $BDq + BKq =$ tum

$$\left\{\begin{array}{l} 2BD \times BK + KDq. \text{ per } 5 \text{ c } 18 \\ CDq \pm 2BD \times BA. \text{ per } 2,3, \text{ c } 19. \end{array}\right\}$$

Erit $2BD \times BK + KDq = CDq \pm 2BD \times BA$. Quare $2BD \times BK \mp 2BD \times BA$. hoc eſt, $2BD \times AK + KDq$: $= CDq$.

$=CDq$. At vero $2\,BD \times AK = \frac{2BD \times BC \times svB}{Rad.}$

Ergo $\frac{-2BD \times BC \times svB}{Rad.} + KDq = CDq$. Quod eſt theorema primum. Et $\frac{CDq - KDq : in\,Rad.}{2BD \times BC} = svB$. Quod eſt theorema ſecundum.



Enunciatur quidem verbis primum theorema ſic: Si duplicatum rectangulum ſub lateribus datis ducatur in ſinum verſum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum, æqualis erit quadrato tertii lateris.

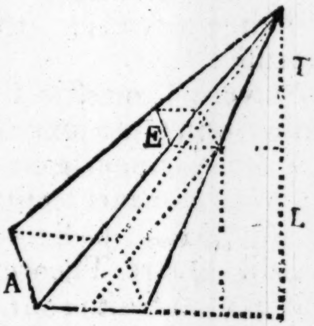
Secundum verò ſic: Si differentia quadratorum lateris oppoſiti, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus dividatur per duplicatum rectangulum ſub lateribus continentibus: quotus æqualis erit ſinui verſo anguli quæſiti.

Probl. XXI. Datis fruſti Pyramidis utraque baſe Aq, Eq, & altitudine L: invenire menſuram fruſti.

Prænoſcendum eſt ex 7 & 10 e 12. quod par-

parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus: Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejuſdem baſis & altitudinis.

Eſtque altitudo pyramidis abſciſſæ (T) primò quærenda, ſic, A—E. E :: L. T. Quare $\frac{LE}{X} = T$. Et altitudo totius pyramidis eſt L+T. Item pyramis tota tripla, eſt AqL+AqT. Et pyramis abſciſſæ tripla, eſt EqT. Ergo triplum fruſtrum pyramidis eſt AqL+AqT-EqT.



Hoc theorema oſtendit unum modum commenſurandi fruſtum pyramidis: Enunciatur autem verbis ſic.

Si ſolidum ſub baſe majore & tota altitudine multetur ſolido ſub baſe minore & altitudine pyramidis abſciſſæ: reliqui triens æqualis erit fruſto.

Rurſus quia per 2 c 11, Aq-Eq=ZX: & $T = \frac{LE}{X}$; Erit AqL+ (ZEL, hoc eſt per 3 e 2) AEL+EqL=AqL+AqT-EqT. Ergo triplex fruſtum pyramidis eſt etiam Aq+Eq+AE in L. Hoc theorema docet alterum modum commenſurandi fruſti: enunciatur autem verbis ſic.

Si aggregatum utriuſque baſis fruſti: pyrami-

ramidis, & mediæ inter ipſas proportionalis, ducatur in altitudinem fruſti: facti triens æqualis erit fruſto.

Item quia per 2 c 11, 2Aq+2Eq=Zq+Xq: Erit ZqL+XqL+2AEL æquale ſex fruſtis. At per 11 c 18. Xq+2AE=Z. Ergo Zq+Z in L æquale eſt ſex fruſtis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commenſurandi fruſti pyramidis. Enunciatur autem verbis ſic. Si ad aggregatum baſium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriuſque baſis, & ſumma eorundem ducatur in altitudinem fruſti: facti ſextans æqualis erit fruſto.

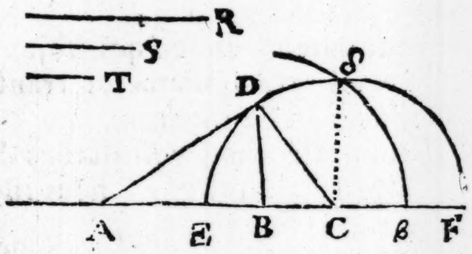
At verò ſi quæſtio ſit de commenſurando fruſto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, ſemiperipheria circuli æqualis eſt $\frac{22}{7}$ Radii ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad. Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113. 355::Rad: q. area circuli. Quare Theorema primum de commenſurando fruſto coni, eſt $\frac{355}{452}$ AqL+$\frac{355}{452}$AqT -$\frac{355}{452}$EqT, æquatur triplo fruſto. Secundum eſt $\frac{355}{452}$Aq+$\frac{355}{452}$Eq+$\frac{355}{452}$AE in L, æquatur triplo fruſto. Tertium eſt $\frac{355}{452}$Zq+$\frac{355}{452}$Z in L, æquatur ſextuplo fruſto Coni.

Probl. XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, deſcribere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ AD, BD, ab iiſdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum eſſe quod quæritur: ſitq; circuli quæſiti centrum C in eadem recta linea

cum

cum punctis A, B; & semidiameter CD. Fiat R.S::S.T. Quia triangula duo ACD,DCB (ubicunque sumitur punctum D) sunt ut AC ad BC: Et latera DA, DB, communi angulo C similiter opposita, sunt in ratione R ad S: & latus C D utrique commune: Non difficile erit concipere triangula ipsa ACD, DCB esse similia. Quare R. S :: DA. DB :: AC. DC::DC. BC. Et per 1 c 15, AC. BC::Rq. Sq ::R.T. Si igitur pro BC ponatur A: Erit AB+A. A::R. T. Et $AB \times T + T \times A = R \times A$: vel $\frac{AB \times T}{R-T} = A$. Denique $\sqrt{: AC \times BC :} = DC$.



Quæ enunciatur verbis sic. Si punctorum intervallum ducatur in tertium rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per excessum termini primi supra tertium: Quotus æqualis erit distantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum rectanguli sub utraque distantia à centro, æquatur semidiametro. Geometrica affectio facillima est.

Probl. XXIII. Datis dolii, sive vasis vinarii,

longitudine interna 2CL, & ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ fit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarū differentia eſt menſura fruſti.

Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{355}{113}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK: Archim. de conoid. & ſphæroid. prop. 32.

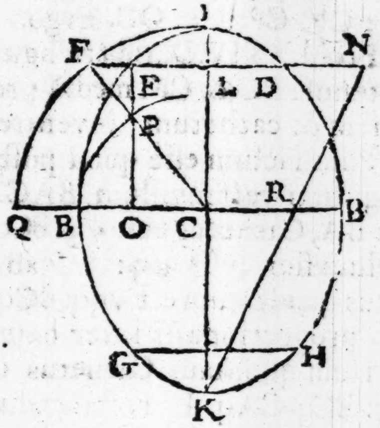
Soliditas verò portionis IED abſciſſæ, habetur ſic. LK. LK+KC:: $\frac{355}{113}$LDq in $\frac{1}{3}$ LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 34.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negocii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat CK. CB::CB. $\frac{CBq}{CK}$=CR, quod eſt ſemilatus rectum per 13 l 1 conic. Apol. Iterū fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$::CK+CL. $\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$=LN. Ducatur in IL, hoc eſt CK—CL (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in CKq-CLq per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$=LEq. per 13 l 1 conic. Apol. Ergo $\sqrt{q}\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$=CK, ſemiaxi; hoc eſt $\frac{CB \times CL}{OP}$=CK.

Quod

Quod theorema verbis enuntiatur ſic. Si quadratum Semi-diametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à ſemidiametris medii & baſis: quoti latus quadratum erit ſemiaxis ſphæroideos.



Geometricè ſic. Ducatur EO parallela axi. Et ſemidiametro CP=CB fiat arcus ſecans ipſam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum baſe LE producta in F. Erit CF æqualis ſemiaxi quæſito. Aliter. Quia CP=CB: & CO=LE: erit ($\surd$u: CBq-LEq) OP. CB::CL. CF=CK.

Conſectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate eſſe veras Ellipſes. Verbi gratia, Cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ. in quo deſcripta ſit Ellipſis IEB. Dico eandem eſſe Meridianum. Nam cum CQ ſit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: ſitq; meridianorum proprium ſecare Æquinoctialem, & omnes circulos ipſi paralelos, in ſegmenta ſimilia, per 10, 12 Theod. de ſphæra. Si igitur conſtiterit eſſe CQ. CB::LF. LE: Ellipſis IEB ſecans ipſos erit meridianus. At

verò CF=CQ: & CP=CB: & OC=LE: Eſtque CF. CP::LE. OC. Ergo.

Probl. XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenuſa BC, & CM mediâ proportionali inter baſem & cathetum; invenire triangulum.

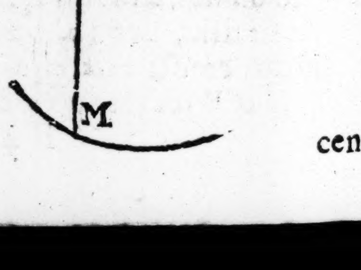
Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitq; triangulum rectangulum BAC. Quoniam baſis eſt BA, Cathetus erit $\sqrt{q}$:BCq-BAq: & rectangulum ſub ipſis $\sqrt{q}$: BCq×BAq-BAqq: cujus latus quadratum eſt $\sqrt{qq}$: BCq×BAq-BAqq: media proportionalis inter baſem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus eſt CA, Baſis erit $\sqrt{q}$: BCq-CAq. Et rectangulum ſub ipſis, $\sqrt{q}$: BCq×CAq-CAqq: cujus latus quadratum eſt $\sqrt{qq}$: BCq×CAq-CAqq: media proportionalis inter baſem & Cathetum.

Quare BCq×BAq-BAqq=CMqq. Et
BCq×CAq-CAqq=CMqq.

Ergo per 9 c 16, $\frac{1}{2}BCq \pm \sqrt{q}:\frac{1}{4}BCqq - CMqq. = \begin{matrix}BAq\\CAq\end{matrix}$

Quod Theorema enuntiatur verbis ſic. Si dimidiato hypotenuſæ quadrato, latus quadratum exceſſus quadrantis quadrato-quadrati hypotenuſæ ſupra quadrato-quadratum medii proportionalis inter baſem & Cathetum, addatur; aggregatum erit baſis quadratum: ſin auferatur, reliquum erit quadratum Catheti.



Geometricè ſic. Dimetro BC, & cen-

centro E medio, deſcribatur ſemicirculus: Tum fiat BC. CM :: CM. CD=AF perpendic. intra ſemicirculum. Eſt igitur BC×AF=CMq. compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BCq (AEq)-AFq=EFq.

Quare $\frac{1}{2}$BC $\pm$ (EF) √q: $\frac{1}{4}$BCq-AFq : = $\left\{\begin{matrix}\text{BF.}\\ \text{CF.}\end{matrix}\right.$

Ducantur omnia in BC: fietque

$\frac{1}{2}$BCq $\pm$ √q: $\frac{1}{4}$BCqq-(BCq×AFq) CMqq : =

= $\left\{\begin{matrix}\text{BC×BF=BAq.}\\ \text{BC×CF=CAq.}\end{matrix}\right.$

Probl. XXV. Datis trianguli rectanguli baſe BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenuſam & Cathetum, invenire triangulum.

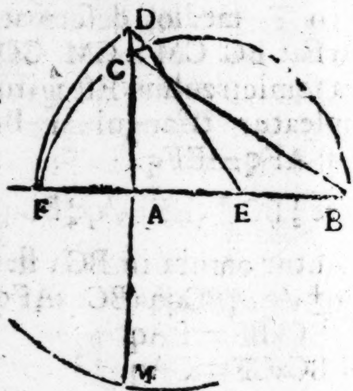
Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus eſt CA, hypotenuſa erit √q: BAq+CAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: CAqq+BAq×CAq.

Item quoniam hypotenuſa eſt BC, cathetus erit √q: BCq-BAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: BCqq-BAq×BCq.

Quare CAqq+BAq×CAq=AMqq. Et BCqq-BAq×BCq=AMqq. Ergò per 9 c 16.

√q: $\frac{1}{4}$ BAqq+AMqq : $\mp$ $\frac{1}{2}$BAq= $\left\{\begin{matrix}\text{CAq.}\\ \text{BCq.}\end{matrix}\right.$

Quod Theorema verbis enuntiatur ſic. Si lateri quadrato ſummæ ex quadrante quadrato-quadrati baſis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenuſam & Cathetum, dimidiatum baſis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: ſin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenuſæ.



Geometricè ſic. Fiat BA.AM::AM. AD perpendic. eſt igitur BA × AD= MAq. Ex medio baſis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED=EF. Et diametro BF deſcribatur ſemicirculus ſecans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BAq + ADq = EFq.

Quare $\sqrt{q}:\frac{1}{4}$ BAq + ADq : $\mp\frac{1}{2}$ BA = $\begin{cases}\text{AF.}\\ \text{BF.}\end{cases}$

Ducantur omnia in BA : fietque

$\sqrt{q}:\frac{1}{4}$ BAqq + (BAq×ADq) AMqq : $\mp\frac{1}{2}$ BAq =

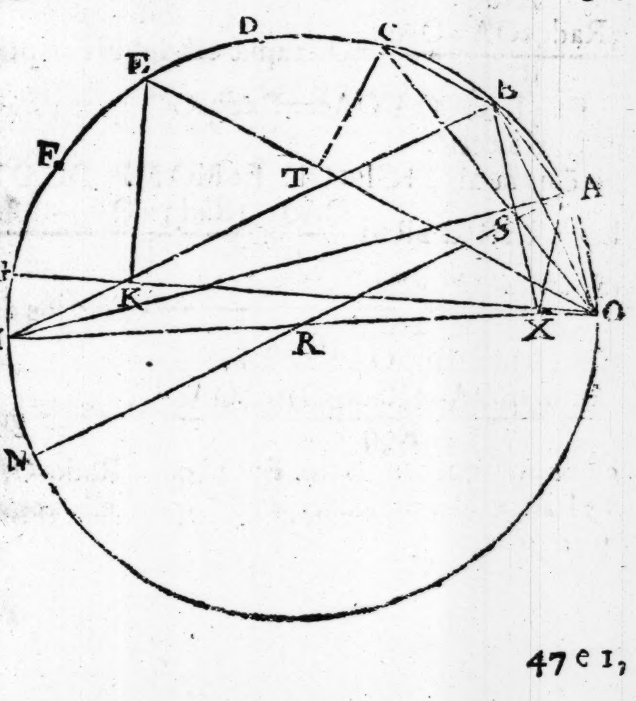
= $\begin{cases}\text{BA×AF=CAq.}\\ \text{BA×BF=BCq.}\end{cases}$

Conſectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, quarum ſuprema ſit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl. XXVI. De angulorum ſive peripheriarum biſectione, triſectione, quinquiſectione, ſeptiſectione, pauca etiam, ad Analytices præſtantiam, uſumque admirandum, oſtendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent : ſicut nec Meſolabium inventum eſt. At vero in Sectione 15 Cap. XVIII, Æquationes quaſdam Cubicas præ-

prælibavi; qua etiam ſolertia, alias innumeras Analytices ſtudioſus poterit comminiſci, quarum fortaſſe ope meſolabium hactenus tenebris obvolutũ, in lucem tandem proferatur.

Diſtinguantur in peripheria ſeptem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur ſubtenſæ, ſicut fit in ſchemate. Sumantur MX=MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam per 17 Cap. XVIII, Theor. 1, AB=AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia; ideoque $\frac{OAq}{Rad.}$ = OX. Sunt etiam triangula OAB, ARM, ſimilia. Et per



47 e 1, $MA = \sqrt{q}: 4Radq - OAq$.

His sic præmissis, erit RA.MA, hoc est, Rad. $\sqrt{q}: 4Radq - OAq :: OA. OB$. Ergo $\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq$: quæ est anguli duplicatio.

Et $4Radq \times OAq - OAqq = Radq \times OBq$: quæ est anguli bisectio.

Deinde quia $OS = OA$. & $SA = OX$. & $NS = MX = MB$. Erit per 17 e 18. Th. 16. $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc est $2Rad - \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, divisa per OA, vel $\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et si addatur OA, fiet $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ est anguli triplic.

Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Itē, quia $2ET + CB = OE$. Et $MO.MB :: OC.OT$: hoc est $2Rad. 2Rad - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq}$. $\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Rqq}$: E cujus duplo si tollatur OA: restabit $\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc + 5Radqq \times OA = Radqq \times OE$: quæ est anguli quinquisectio.

At-

Atque hac forma progredi licet ad Septisectionem inveniendam. Nempe $7\,Rcc \times OA - 14\,Rqq \times OAc + 7\,Rq \times OAqc + OAqqc = Rcc \times OG$.

Nam $MO.\,MB :: OE.\,OK$. Et $2OK - OC = OG$. Operationem studiosis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Divisione, nihil mutat: idcircò in hisce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ Æquationes (in quibus non sunt tantum tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes) solvantur, quanquam non est hujus instituti docere: tamen quod in hoc negotio in usum nobilissimi doctissimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus sum; in gratiam studiosorum Mathematices, qua possum brevitare, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIÆ.

De
ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIONE in NUMERIS.

1. CONstruendæ Æquationis affectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto Lqc-5BLqq+10CqLc--10DcLq+5FqqL=Gqc. Quæ in numeris, statuendo L (radicem) 47, erit 1qc-15qq+160c-1250q+6480l=170304782. vel omissa *unciarum* distinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47; erit Lq=2209: & Lc=103823: & Lqq =4879681: & Lqc=229345007.

Constructionis hujus Practica.

BLqq 15×4879681	229345007 -73195215	Lqc
CqLc 160×103823	156149792 +16611680	
Dc Lq 1250×2209	172761472 —2761250	
Fqq L 6480×47	170000222 + 304560	
	170304782	Gqc

2. Pro

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam.

1qc-15qq+160c-1250q+6480l=170304782:

Vel, numeris in ſymbola mutatis,

Lqc-BLqq+CqLc—DcLq+FqqL=Gqc:

Et ſi plures eſſent affectionum Species, conſequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & ſic ulterius.

3. Radicis L ex his inveſtigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus ſecundum, ſive ſubſequens quodlibet. Quare L=A+E: & omnes poteſtates ex L, æqualiter conſimilibus poteſtatibus ex A+E: v. g. Lq=Aq+2AE+Eq: & Lc=Ac+3AqE+3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numeroſam hanc poteſtatum affectarum reſolutionem cupit addiſcere, eum in purarum poteſtatum Geneſi & Analyſi, bene verſatum eſſe oportet.

4. In Æquatione propoſitâ, poteſtas reſolvenda 170304782, ſive Gqc, eſt Quadrato-cubica, cujus etiam generis ſunt ſingulæ affectionum Species. Nam *Heterogenea inter ſe nec addi poſſunt, nec ſubtrahi.*

5. Quare in ſingulis affectionibus duo ſunt conſideranda, Gradus affectionis & Coëfficiens: ut in 15qq, affectionis gradus eſt Quadrato-quadraticus, & coëfficiens 15, lateralis: In 160 c, affectionis Gradus eſt cubicus, & Coëfficiens 160, Quadraticus: In 1250q, affectionis Gradus eſt Quadraticus, & coëfficiens 1250, cubicus: deniq; in 6480l, affectionis gradus eſt lateralis, & coëfficiens 6480, Quadrato-quadraticus: ſicut ex utraque Æquationis deſigna-

ſignatione comparata clariſſimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Conſectaria pro laterum ſingularium extractione.

6. Primum Conſectarium eſt, Si coefficientis pro ſua ſpecie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipſum coefficientem: factus erit ejuſdem generis cum poteſtate reſolvenda: Ut in præcedente Æquatione, ſi latus 15 Quadrato-quadraticè multiplicatū, ducatur in 15; & ſi √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & ſi √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique ſi √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex ſingulis hiſce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus eſt reducendi coëfficientem quemlibet ad ſpeciem poteſtatis reſolvendæ*, in lateris primi ſingularis extractione uſitatiſſimus.

7. Unde etiam clariſſimè liquet, quod ſi numerus ex coefficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor ſit poteſtate reſolvenda, latus ipſius etiam minus eſt latere poteſtatis reſolvendæ; Si verò major, eſt majus; & ſi æqualis, æquale. In hac igitur Æquatione, 1qc-15qq + 160c-1250q+6480 l =170304782; vel 170304782+15qq-160c+1250q-6480 l=1qc; ſi tum coefficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c 1250, tum √qq 6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor affectionum ſpecies homogeneæ, nempe 7593.., 3238.., 1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos faciliime fit, ſatiſque pro propoſito accuratè. Operationis ratio, ex fine hujus

jus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, sic est. (Vide Sect. 27, una cum pag. 149, &c.)

Logarithmi.		Numeri Coëfficientes.
1)2)3)4) sunt dimensiones in Coëfficiente.		
1) 5×1, 17609		1599
5,88045		+7593..
2)2, 20412		160c
5×1, 10206.	12|65	
5,51030		-3238..
3)3, 09691		1250q
5×1, 03230.	10|8-	
5, 16150		+1450..
4)3, 81157		64801
5×0, 95289.	8|97	
4, 76445		-0581..

In Æquatione igitur proposita, speciebus pro signorum ratione in unam summam aggregatis, erit 170304700 + 759300—323800 + 145000—058100=1qc=170827100. Quod etiam in aliis æquationibus similiter fieri poterit.

8. Secundum est, Si potestas resolvenda per Coefficientem dividatur, quotus ad ipsum affectionis gradum referretur: hoc est, quotus erit latus, si affectio sit sub latere; vel quadratum si sub quadrato; & sic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione, si 170304782 divi-

dividatur per 15, quotus erit Quadrato-quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per 1250, quotus erit Quadraticus; si denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus, sed ipsius plerumque radix pro affectionis gradu, erit latus singulare eliciendum.

9. In secundæ etiam radicis investigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figuram in quoto censendus fere erit ejus gradus: ut si quotus unica constet figura, sit latus; Si duabus, Quadratum; si tribus, cubus, &c. Et si quotus superet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortasse sequentem, in grandioribus præsertim affectionibus, poterit extendi. Atque *hæ sunt divisionis Analyticæ leges.*

10. Nec in istiusmodi *Multiplicatione* atque *Divisione*, totam potestatem resolvendam, cum toto Coëfficiente, percurrere opus erit; sed solummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in resolutione affectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in potestate resolvenda, sicut in puris: Supremi quidem gradus supra: reliquorum verò infrà. Coëfficientes etiam, pro sua quisque specie, punctandi sunt. Prioris exempli punctationes sic erunt,

1qc-15qq+160c-1250q+06480l=170304782

12. De-

12. Debet autem regulariter (præsertim si Coëfficiens sit negativus) numerus punctorum in singulis esse æqualis. Quare si potestas resolvenda puncta plura, sive pauciora habeat supra se, quam Coefficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobique possint esse æqualia. Et in singulis lateribus eruendis punctum coëfficientis lateri illi proprium, ad parile potestatis resolvendæ punctum superius, accommodandum est: quod quidem fiet, si unitatis locus in coëfficiente, ad puncta potestatis inferiora gradui suo convenienta, ordine dimoveantur.

13. Si Coëfficiens aliquis sit fractio, sive latus surdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et si opus sit radicis eductionem in partibus decimalibus persequi: post lineam separatricem circulos quot visum erit adscribes, eosque supra & subtus, punctis consimiliter insignire perges.

15. Tabula ostendens tum *Divisores*, tum *Gnomones*, pro laterum singularium in Æquationibus affectis investigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica posteriore. Et nota, quod Coëfficientis cujusque species omnes sunt affirmatæ, si ipsa sit affirmata; negatæ vero, si negata.

Pro

Pro Primo Latere.	Pro Lateribus singularibus sequentibus, ad complendum *Gnomonem*.					
Aq	2AE .	Eq				=Cq
BA	BE .					
Ac	3AqE .	3AEq.	Ec			=Dc
BAq	B2AE .	BEq.				
CqA	CqE .					
Aqq	4AcE .	6AqEq.	4AEc.	Eqq		=Fqq
BAc	B3AqE .	B3AEq.	BEc.			
CqAq	Cq2AE .	CqEq.				
DcA	DcE .					
Aqc	5AqqE .	10AcEq.	10AqEc.	5AEqq .	Eqc	=Gqc
BAqq	B4AcE .	B6AqEq.	B4AEc.	BEqq .		
CqAc	Cq3AqE .	Cq3AEq.	CqEc.			
DcAq	Dc2AE .	DcEq.				
FqqA	FqqE .				&c.	

16. *Di-*

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque aggregatis, habita signorū ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coefficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omninò poterit.

Secunda. Si Coefficiens in anteriora prorumpit, sitque affirmativus: devolvendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat. Per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coefficientis, pro suo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coefficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coefficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resol-

vendæ

vendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit $Ac \pm CqA = Dc$, erit $Ac = Dc \mp CqA$. At si Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Potestas resolvenda è coëfficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA-$Ac = Dc$, erit $Ac = CqA$-Dc. tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primū eliciendū. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem; aliquando per extractionem radicis è coëfficiente; sed plerumque per reductionem coëfficientis investigatur.

19. Atque his præceptis solerter perpensis, Illud demùm verum latus singulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam (diligente ubique tum signorum, tum sedium, respectu habito) aggregatis; numerum profert potestate resolvendâ, unde subtrahendus est, non majorem. Notandum autem est, quod numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum affirmativo, tum negativo minore: ut -4 minor est quam 1, & quam -1. Item quòd subductio mutat signum numeri subducendi: ut ex 4 tolle 6, restat 4-6, hoc est -2. Et ex -4 tolle -6, restat -4+6, hoc est 2. Deniq; ex 4 tolle -6, restat 4+6, hoc est 10. Quare in lateris primi singularis extractione, tentandum aliquoties est, donec latus verū inveneris quod per proximè majus, certissimè agnosces.

20. In constitutione divisoris pro secundo latere investigando; Coëfficientis ductæ in

gra

gradū quemlibet,ſedes ordinari debet ſecundū proprii gradus punctationem; hoc eſt,Coëfficientis ſublatere ſedes diſtabit verſus ſiniſtram, à puncto ſive ſede ipſius Coëfficientis,uno loco: Coëfficientis ſub quadrato ſedes, duobus locis: ſub cubo,tribus: &c. Et ob vitandam confuſionem, utile erit in reſiduo poteſtatis reſolvendæ,punctationes illas,quæ præſenti radici eruendæ inſerviunt, ſolas diſtinguere.

21. Tum latus ſingulare ſecundum elicietur ſic: Diviſores cujuſq; generis, ex tabula præcedente inventi, & juſto ordine diſpoſiti, in unam ſummam aggregentur; & per totalem illū diviſorem, reliquū poteſtatis reſolvendæ dividatur. Nam quotus juxta diviſionis Analyticæ leges (ſi id uſus exigat) perpenſus, dabit latus ſingulare ſecundū eliciendū. Cæterùm in hac inveſtigatione multotiès, præſertim ſi magnitudinum dividentium negativarū aggregatū, aggregato affirmativarum penè æquetur (adeò ut Diviſor Reliquo poteſtatis reſolvendæ minor admodum ſit) maxima ineſt lubricitas: quam tamen Analyſta ſagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula eſto perpetua. Illud demùm verū latus ſingulare ſecundū eſt, quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*,conſtantem ex complementis cujuſque generis, & Coëfficientibus, ſicut Æquationis conditio poſtulat,juxta tabulam præcedentem,multiplicatis; omnibuſq;in unam ſummā,diligente ubiq; tū ſignorū, tū ſediū,habita ratione,aggregatis; qui *Gnomon* non major ſit poteſtate reſolvenda unde ſubtrahendus eſt.Quare tentandū aliquoties

ties est, donec latus verũ inveneris: quod etiã per proximè majus, certissime agnosces.

23. Latera omnia singularia post secundum, per Divisionem simplicẽ facillimè acquiruntur.

24. Si affectiones sint compositæ ex affirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim sunt cum solertia & judicio usurpanda. Et in lateribus æstimandis præponderabit semper affectio major, minori. Verùm totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequẽns exercitatio, tum in Genesi, tum in Analysi potestatum cujusque generis, facile satis reddet, atque familiare.

25. Sed quia superius aliquoties dictum est, tentatu opus esse; quod quidem in affectionibus multiplicibus, & ubi gradus sunt elatiores, valde laboriosum erit: apponam hic, coronidis loco, duos modos ejusmodi tentamenti levandi: unum per Depressionem, ex *Cap*. XVI. Sect. 7. *Clavis:* alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem si Æquatio fuerit ambigua, signa ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hic est, quod numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum affirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum singularium per Depressionem. Si latus primum quæratur: In singulis Æquationis datæ speciebus abscindantur lineâ separatrice omnia puncta post primum. Deinde applicentur omnes species ad latus; hoc est, deprimantur uno gradu.

Exem. I. 1qq-72c+2386001=8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c+238|6-7|2q=L)872|5. Esto A 4. Erit 4)872|5(218|1, justus. Et

Et + 64 + 238|6 − 115|2 = 187|4, minor juſto.

Eſto A 5. Erit 5)872|5(174|5, juſtus.

Et + 125 + 238|6 − 180|0 = 183|6; major juſto. Latus igitur verum A = 5-1, hoc eſt, 4.

Exempl. II. De Æquatione ambigua. 1c-325 7l = -45744. Hæc deprimendo fiet 1q-32|5 = L)-45|7.

Eſto A 4. Erit 4)−45|7(−11|4, juſtus.

Et + 16 − 32|5 = −16|5, minor juſto.

Eſto A 5. Erit 5)−45|7(−9|1, juſtus.

Et + 25 − 32|5 = −7|5, major juſto.

Latus igitur verum A = 5 − 1, hoc eſt, 4.

Si latus ſecundum quæratur: In ſingulis ſpeciebus abſcindantur omnia puncta poſt ſecundum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad quadratum; hoc eſt, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

1qq − 72c + 238600l = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1q + L)238600-72l = Q) 8725815.

Eſto A 47: erit 2209)8725815(3949. juſtus.

Et 2209 + 5077 − 3384 = 3902. minor juſto.

Eſto A 48: erit 2304)8725815(3787. Juſtus.

Et 2304 + 4971 - 3456 = 3819: major juſto.

Latus igitur verum eſt 48 − 1, hoc eſt, 47.

27. Inventio lateris ſingularis ſecundi per *Logarithmos*.

Index Logarithmi cujuſque deſumitur ex tabella in initio *Clav.* pro diſtantia primæ ſuæ figuræ, ante vel poſt locum unitatum, cujus index eſt 0. Eædem igitur figuræ, eodem or-

dine diſpoſitæ, eundem habent Logarithmum: Indices vero diverſi eſſe poſſunt. Ut numeri 436, Log: eſt 2,6394865: at numeri 43600, eſt 4,6394865, & numeri 4|36, Log: eſt 0,6394865. Denique numeri 0|00436, Log: eſt $\bar{3}$,6394865.

Summa duorum Logarithmorum, Logarithmus eſt facti à valoribus: differentia autem, Logarithmus eſt quoti. Ut quia 4|36×9=39|24 hujus Logar. 1, 5937290 = 0, 6394865 + 0,9542425. Et quia 9)39|24(4|36: hujus Log: 0, 6394865=1,5937290−0,9542426.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimenſionum cujuſque poteſtatis, eſt ejuſdem poteſtatis Logarithmus: Ut quia numeri 436, Log: eſt 2,6394865: Erit 2,6394865×2=Log: Q: 436. Et 2, 6394865×3=Log: C: 436: Et 2, 6394865×4=Log: QQ: 436, &c.

Logarithmus poteſtatis cujuſque diviſus per numerum dimenſionum earum, exhibet Logarithmum radicis ſuæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo ſecundi, reliquus erit Logarithmus rationis: Qui, ſi in numerum terminorum minus uno (qui numerus eſt rationum) ducatur; deindeque Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia ſatis ſunto: quibus intellectis, reliquam operationem, exempla ſequentia diligenter inſpecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, poſt duas primas, linea ſeparatrice abſcindendæ ſunt. Ex-

Exempl. I. 1qq-72c+238600l=8725815.
Juſtus. Sunto duo prima latera ſingularia.

47. 1,67209|8	−72	+238600
Cu: 5,01629	1,85733	5,37767
QQ: 6,68839	5,01629	1,67210
	6,87362	7,04977
+4880...	−7475...	+11213...

Et +4880...+11213...-7475...=+8618...
minor juſto.

48. 1,68124|1	1,85733	5,37767
Cu. 5,04372	5,04372	1,68124
QQ. 6,72496	6,90105	7,05891
+5308...	−7963...	+11455...

Et +5308+11455-7963=48800... major juſto.
Radix igitur vera erit 48−1, hoc eſt, 47.

Exempl. II. 1c−3257l=−45744. Juſtus
Sunto duo prima latera ſingularia.

	−3257
48. 1,68124|1	3,51282
Cu. 5,04372	1,68124
+1106	5,19406
	-1563

+1106−1563=−457, minor juſto, (ſaltem non major.)

49. 1,69019|6	3,51282
Cu. 5,07059	1,69020
+1176	5,20302
	−1596

+1176−1596=−420; major juſto.
Radix igitur vera erit 49−1, hoc eſt, 48.

Latus ſecundum inveſtigari poterit per Logarithmos, etiam Depreſſione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq− 1246|00q=08972|6256. Hæc quadraticè depreſſa fiet 1q−1246=Q) 8972|6.

Supponantur duo prima latera ſingularia,

	8972|61
34. 1,53148	3,95337
Q. 3,06296	3,06296
+1156	0,89041: valor 7|76 Juſtus.

+1156−1246=-90: minor juſto.

36. 1,55630	3,95337
Q. 3,11260	3,11260
+1296	0,84077: valor 6|93 Juſtus.

+1296−1246=+50: major juſto.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modo in XXVIII Sectionibus, ſive Præceptis (qui numerus eſt perfectus) doctrinam de Æquationum affectarum reſolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur ſit omnis laus, honor, & gloria in ſempiternum. *Amen.*

Exempla

Exempla quædam Æquationum Reſolutarum in Numeris.

ÆQuationum Quadraticarum, omniumque in quibus ſunt tres ſpecies in ordine ſcalæ æqualiter adſcendentes, Analyſi ſuperſedebo: quia in cap. XVI. Sect. 9. *Clavis*, modus facilior traditus eſt, quàm per generalem hanc methodum præſtari poterit: Et ad Exempla Æquationum aliter affectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, ſubjungam; in quibus operationis ratio, in terum ſingularium inveſtigatione, ex præceptis ſuperiùs traditis, aperietur.

Initium faciam à Reſolutione numeroſæ Æquationis primò conſtitutæ, Nempe

1qc-15qq+160c-1250q+6480l=170304782

Hoc eſt, Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL=Gqc

Exemplum I.

1qc-15qq+160c--1250q+06480l=170304782.
Hoc est, Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL=Gqc.

1703	04782	(47
1	5	—B
1	250	—Dc
1	60	Cq
	6480	Fqq
1024		Aqc
102	40	CqAc
2	5920	FqqA
+1128	9920	
384	0	—BAqq
20	000	—DcAq
—404	000	
724	9920	*Ablatit.*
R 978	05582	
128	0	5Aqq
6	40	10Ac
	160	10Aq
	20	5A
7	680	Cq3Aq
	1920	Cq3A
	160	Cq
	6480	Fqq

+14

+142	50040	
38	40	-B4Ac
1	440	-B6Aq
	240	-B4A
	15	-B
1	0000	-Dc2A
	1250	-Dc
—40	87665	
+101	62375	*Divisor.*
896	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
+1333	62047	
268	80	-B4AcE
70	560	B6AqEq
8	2320	-B4AEc
	36015	-BEqq
7	0000	-Dc2AE
	61250	-DcEq
-355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

Exemplum II.

$1c + 420000 l = 247651713$

Hoc eſt, $Lc + CqL = Dc$.

	247	651	713	(417
	42	000	0	Cq
	64			Ac
	168	000	0	CqA
	232	000	0	*Ablatit.*
R	15	651	713	
	4	8		3Aq
		12		3A
	4	200	00	Cq
	9	120	00	*Diviſor.*
	4	8		3AqE
		12		3AEq
		1		Ec
	4	200	00	CqE
	9	121	00	*Ablatit.*
R	6	530	713	
		504	3	3Aq
		1	23	3A
		420	000	Cq
		925	530	*Diviſor.*
	3	530	1	3AqE
		6	027	3AEq
			343	Ec
	2	940	000	CqE
	6	530	713	*Ablatit.*

4	1
16	
	8
	1
16	81

Ex-

$1c + 1007q = 247617936.\quad Lc + BLq = Dc.$

	247	617	936	(417
	10	07		B
	64			Ac
	161	12		BAq
	225	12		*Ablatit.*
R	22	497	936	
	4	8		3Aq
		12		3A
	8	056		B2A
		100	7	B
	13	076	7	*Divisor.*
	4	8		3AqE
		12		3AEq
		1		Ec
	8	056		B2AE
		100	7	BEq
	13	077	7	*Ablatit.*
R	9	420	236	
		504	3	3Aq
		1	23	3A
		825	74	2BA
		1	007	B
	1	332	277	*Divisor.*
	3	530	1	3AqE
		60	27	3AEq
			343	Ec
	5	780	18	B2AE
		49	343	BEq
	9	420	236	*Ablatit.*

4	1
16	
	8
	1
16	81

Exemplum IV.

1qq--44299005l = 022252086.

Lqq — Dc L = Fqq.

0	2225	2086	(354
--44	2990	05	—Dc
+81			Aqq
--132	8970	15	—DcA
--51	8970	15	*Ablatit.*
R 52	1195	3586	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+11	352		
--4	4299	005	—Dc
+6	9220	995	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	50		6AqEq
1	500		4AEc
	625		Eqq
+69	0625		
--22	1495	025	—DcE
+46	9129	975	*Ablatit.*
R 5	2065	3836	
+1	2793	7395	*Divisor.*
+5	2065	3836	*Ablatit.*

Ex.

Exemplum V.

1qq-124600q=0897262 56, Lqq-CqLq=Fqq

0	3972	6256	(354
-12	4600		-Cq
+ 81			Aqq
-112	1400		-CqAq
-31	1400		*Ablatit*
R 32	0372	6256	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+ 11	352		
-7	4760	0	-Cq2A
-	1246	00	-Cq
-7	6006	00	
+ 3	7514	00	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	50		6AqEq
1	500		4AEc
	625		Eqq
+ 69	0625		
-37	3800	0	-Cq2AE
--3	1150	00	-CqEq
-40	4950	00	
+ 28	5675	00	*Ablatit.*
R 3	4697	6256	
	8489	1800	*Divisor.*
+ 3	4697	6256	*Ablatit.*

1qq − 340c = 621066096. Lqq − BLc = Fqq.

6	2 1 0 6	6 0 9 6	(3 5 4
−3	40		−B
+8 1			Aqq
−9 1	8 0		BAc
−1 0	8 0		*Ablatit.*
R 1 7	0 1 0 6	6 0 9 6	
1 0	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+1 1	3 5 2		
−9	1 8 0		-B3Aq
−	3 0 6 0		-B3A
	−3 4	0	-B
−9	4 8 9 4	0	
+1	8 6 2 6	0	*Diviſor.*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq
+6 9	0 6 2 5		
−4 5	9 0 0		-B3AqE
−7	6 5 0 0		-B3AEq
−	4 2 5 0	0	-BEc
−5 3	9 7 5 0	0	
+1 5	0 8 7 5	0	*Ablatit.*
R 1	9 2 3 1	6 0 9 6	
+	4 6 9 2	9 0 6 0	*Diviſor.*
+ 1	9 2 3 1	6 0 9 6	*Ablatit.*

Exempl.

Exemplum VII.

1qq -- 77108000 l = 085530576. Lqq -- DcL = Fqq.

0	8553	0576	(426	
--77	1080	00	--Dc	
+256			Aqq	
--308	4320	00	--DcA	
--52	4320	00	*Ablatit.*	
R 53	2873	0576		4 . 2
25	6		4Ac	16
	96		6Aq	16
	16		4A	4
+26	576			1764
--7	7108	000	--Dc	
+18	8652	000	*Divisor.*	
51	2		4AcE	
3	84		6AqEq	
	128		4AEc	
	16		Eqq	4 . . 2
+55	1696			64
--15	4216	000	--DcE	96
+39	7480	000	*Ablatit.*	48
				8
R 13	5393	0576		74088
+2	2030	4080	*Divisor.*	
+13	5393	0576	*Ablatit.*	

Exempl.

Exemplum VIII. Trisectionis.

3200l—1c=46577 Æquatio est ambigua.

CqL – Lc=Dc.

(47 *Radix major.*

46	577	
32	00	Cq
--64		-Ac
+ 128	00	CqA
+ 64	00	*Ablatit.*
R - 17	423	
-4	8	-3Aq
-	12	-3A
-4	92	
+3	200	Cq
--1	720	*Divisor.*
-33	6	-3AqE
-5	88	-3AEq
-	343	-Ec
-39	823	
+22	400	CqE
-17	423	*Ablatit.*
R 00	000	

Exemplum IX. Trisectionis.

3200l—1c=46577

(15|7 *Radix minor.*

	46	577	Dc	
	32	00	Cq	
	--1		Ac	
	+32	00	CqA	
	31	00	*Ablatit.*	
R	15	577		
	--	3	-3Aq	
	--	3	-3A	
	--	33		
	+ 3	200	Cq	
	2	870	*Divisor.*	
	-1	5	-3AqE	
	--	75	-3AEq	
	--	125	-Ec	
	--2	375		
	+16	000	CqE	
	13	625	*Ablatit.*	
R	1	952	000	
		252	05	*Divisor.*
		745	107	*Ablatit.*
R	1	206	893	000&c.

Exempl.

Exemplum X.

53q—1c=13254 Æquatio est ambigua.

BLq—Lc=Dc

13	254	(47 Radix major.
5	3	B
-64		-Ac
+84	8	BAq
+20	8	*Ablatit.*
R--7	546	
--4	8	-3Aq
--	12	-3A
--4	92	
4	24	B2A
	53	B
+ 4	293	
—	627	*Divisor.*
--33	6	-3AqE
--5	88	-3AEq
--	343	-Ec
--39	823	
29	68	B2AE
2	597	BEq
+32	277	
--7	546	*Ablatit.*
R 0	000	

Exemplum XI.

53q—1c=13254.

BLq—Lc=Dc.

(20|05 *Radix minor.*

13	254	
5	3	B
--8		-Ac
21	2	BAq
13	2	*Ablatit.*

R	54	000	000		
	-12	000	0	--3Aq	
		--6	00	--3A	
	--12	006	00		
	21	200		B2A	
		5	3	B	
	+21	205	3		
	9	199	30	*Divisor.*	
	--60	000	0	--3AqE	
	--	150	00	--AEq	
		-	125	--Ec	
	--60	150	125		
	106	000		B2AE	
		132	5	BEq	
+	106	132	5		
	45	982	375	*Ablatit.*	
R	8	017	625	000	&c.

Exemplum XII. Trisectionis.

$$600341 - 1c = 1023768$$

$$CqL - Lc = Dc.$$

1	023	768	(236 Radix major.
6	003	4	Cq
—8			-Ac
+12	006	8	CqA
+ 4	006	8	*Ablatit.*
R-2	983	032	
—1	2		-3Aq
	—6		-3A
--1	26		
+	600	34	Cq
—	659	66	*Divisor.*
-3	6		-3AqE
-	54		-3AEq
	-27		-Ec
-4	167		
+ 1	801	02	CqE
-2	365	98	*Ablatit.*
R--	617	052	
	--96	366	*Divisor.*
	617	052	*Ablatit.*

Exem. XIII.

Exemplum XIII.

600341 -- 1c = 1023768

(017|1369 *Radix minor.*

1	023	768				
	600	34	Cq			
	--1		--Ac			
+	600	34	CAq			
+	599	34	*Ablatit.*			
R	424	428				
	--	3	--3qA			
		--3	--3A			
	--	33				
	+60	034	Cq			
	59	704	*Divisor.*			
	--2	1	--3AqE			
	--1	47	--3AEq			
	--	343	--Ec			
	--3	913				
+	420	238	CqE			
+	416	325	*Ablatit.*			
R	+8	103	000			
	5	916	19	*Divisor.*		
	5	916	189	*Ablatit.*		
R	2	186	811	000		
		591	562	57	*Divisor.*	
	1	774	656	903	*Ablatit.*	
R		412	154	097	000	
		59	153	637	91	*Divisor.*
		354	920	285	544	*Ablatit.*
R		57	233	811	456	000&c.

Exemplum XIV.

$$1qq - 72c + 238600l = 8725815\,7056$$

$$Lqq - BLc + DcL = Fqq.$$

8 7 2	5 8 1 5	7 0 5 6 (4 7 1 6
−7	2	−B
+ 2 3 8	6 0 0	Dc
2 5 6		Aqq
9 5 4	4 0 0	DcA
+12 1 0	4 0 0	
−4 6 0	8	−BAc
+ 7 4 9	6 0 0	*Ablatit.*
R 1 2 2	9 8 1 5	7 0 5 6
2 5	6	4Ac
	9 6	6Aq
	1 6	4A
2 3	8 6 0 0	Dc
+ 5 0	4 3 6 0	
−3 4	5 6	−B3Aq
−8	6 4	−B3A
	−7 2	−B
−3 5	4 3 1 2	
+ 1 5	0 0 4 8	*Divisor.*
1 7 9	2	4AcE
4 7	0 4	6AqEq
5	4 8 8	4AEc
	2 4 0 1	Eqq
1 6 7	0 2 0 0	DcE
+ 3 9 8	9 8 8 1	
−2 4 1	9 2	−B3AqE
−4 2	3 3 6	−B3AEq
−2	4 6 9 6	−BEc
−2 8 6	7 2 5 6	
1 1 2 2	6 2 5	*Ablatit.*
R 1 0 7	1 9 0	7 0 5 6
1 7 6	9 8 8 0 8	*Divisor.*
1 0 7 1	9 0	7 0 5 6 *Ablatit.*

Exemplum XV. Trisectionis.

3l—1c=1|258640782100. CqL—Lc=Dc.

1	258	640	782	1	(0|4499 *Radix minor.* Subtensa Gr. 26.
3		3Cq			
	--64	-Ac			
+ 1	2	CqA			
1	136	*Ab*	*latit.*		
R	122	640			
	--4	8	-3Aq		
	--	12	-3A		
	--4	92			
	+3		Cq		
	25	08	*Divi*	*sor.*	
	--19	2	-3Aq	E	
	—1	92	-3AE	q	
		--64	-Ec		
	--21	184			
+	12		CqE		
	98	816	*Abla*	*tit.*	
R	23	824	782		
	2	417	88	*Divisor.*	
	21	665	151	*Ablatit.*	
R	2	159	631	100	
		239	506	23	*Divisor.*
	2	154	585	501	*Ablatit.*
R		05	045	599	000

Exempl.

Exemplum XVI. Quinquisectionis.

1qc-5c+5l=1|147152872702092

Lqc-CqLc+FqqL=Gqc.

1	14715	28727	02092	
+	5	Fqq		
	--5	--Cq		
	32	Aqc		
1	0	FqqA		
+ 1	00032			
	--40	CqAc		
	96032	*Ablatit.*		
R	18683	28727		
	8	0	5Aqq	
		80	10Ac	
		40	10Aq	
		10	5A	
	5		Fqq	
	+5008	8410		
	--60		-Cq3Aq	
	--30		-Cq3A	
	--	5	-Cq	
	−630	5		
	+4378	3410	*Divisor.*	
	32	0	5AqqE	
	12	80	10AcEq	
	2	560	10AqEc	
		2560	5AEqq	
		1024	Eqc	
	20		FqqE	
+	20047	62624		

(0|2437
Subtensa
Gr. 14.

	--240		-Cq3 Aq	E
	--480		-Cq3 AE	q
	--32	0	-CqEc	
	--2912	0		
	17135	62624	*Ablatit.*	
R	1547	66103	02092	
	414	9122		*Divisor.*
	1242	64912	09443	*Ablatit.*
R	305	01190	92649	00000

Notæ in Exempla precedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex applicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c+238|6.—7|2q =L) 872|5. Si pro latere primo supponantur 5: Oportet esse C: 5: +238|6—7|2Q: 5: = 8725 divisо per 5: hoc est 125 + 238|6—(7|2x25) 180, nempe 183|6 æqualem esse 174|5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterum 4: Et periculum fac, an C: 4: +238|6-7|2Q: 4: æquetur 872|5 diviso per 4.

Cæte-

Cæterùm nè in his Exemplis, ſicut etiam in ſequentibus, tentamenta hæc caſu merè fortuito ſuſcipiantur; Monendum erit,

Primò, Si lateris eruti homogenea poteſtas excedat poteſtatem Reſolvendam; vel, ſi magnitudines augentes poteſtatem Reſolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimum) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, $1c+260000l=180931713$.

Secundò, Si Diviſores ſub eodem ſigno cum Reliquo poteſtatis Reſolvendæ, excedant eos, qui ſunt ſub ſigno diverſo: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: ſin aliter, majus: Ut in hac Æquatione, $15681-1c=21952$. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum poteſtatis Reſolvendæ eſt affirmativum: ut in hac Æquatione, $67681-1c=214273$. Harum trium Æquationum ſolutio in praxi, poſt Notas oſtendetur.

Tertiò, Si poſt hæc Monita, nihilominus ſubſit dubitatio; tentamentum à 5 commodiſſimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquiſitio: ſive ea per Depreſſionē fiat, ſive per Logarithmos.

His præmonitis, reſtat ut Exempla ipſa diſcutiamus.

Ad Exempl. I. $\surd qc1703$ eſt 4+, per Sect. 18, Reg. 1. Nam ut ex Sect. 7. apparet, per Coëfficientes Analyticè reductos, non ſit in

primo

primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9: quia Diviſores ſub ſigno + (quod ſignum eſt ipſius Reſidui) excedunt eos qui ſunt ſub ſigno —.

Ad Exempl. II. 42) 247 (6 —, per Sect. 18, Reg. 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect. 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Eſtque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6—: excedit 247|6.

Ad Exempl. III. 10) 247 (24+=Q:5—: per Sect. 18, Reg. 2. At 10·Q:5: = 250 24=7|6. Monit. 1.

Ad Exempl. IV. $\surd$c44|3 eſt 3+, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 8—, per Monit. 2.

Ad Exempl. V. $\surd$q12|4 eſt 3+, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9-, per Monit. 2.

Ad Exempl. VI. Coëfficiens lateralis 3|4 Quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus 6|2, fit 140, QQ: 3+: per Sect. 18, Reg. 4. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9—, per Monit. 2.

Ad Exempl. VII, $\surd$c77 eſt 4, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum eſt 4.

Ad Exempl. VIII. $\surd$q32 eſt 5|65, in 32, fit

H 180

180|8 mi 46|5, reſtat 134, C: 5: per Sect. 18. Reg. 4. At 134 excedit 46|5. Quare latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit. 2.

Ad Exempl. IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect. 18, Reg. 3.

Ad Exempl. X. C: 5: eſt 125, mi 13, reſtat 112, C: 5—: per Sect. 18, Reg. 4. At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit. 2.

Ad Exempl. XII. √q6 eſt 2+, in 6 fit 12, mi 1, reſtat 11, C: 2|5 per Sect. 18, Reg. 4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2+, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 5, per Monit. 2.

Ad Exempl. XIV. QQ: 7|2: eſt —2687. Et √c238|6 eſt 6|2, cujus QQ eſt + 1480. Tum —2687+1480 = —1207: Hic additus ad 872, dat 2079, QQ: 6+: per Sect. 18, Reg. 4. Et quia adjectitius —2687 major eſt quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9, per Monit. 2.

Ad Exempl. XV, XVI. Quia, in utroque, Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obſtant Coëfficientes etiam reducti, Analyſis per Diviſionem fiet, juxta Sect. 18. Reg. 1.

Praxis

Praxis Exempli in Monito primo.

1C+26(0000=180931713.

180|9 (4, latus A

26|0 Cq.

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C: 3+: qui minor est quam 180. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis Exempli in Monito secundo.

15681 - 1C = 21952

21	952	(28, Duo prima latera.
15	68	Cq
-- 8		-Ac
+31	36	CqA
+23	36	*Ablatit.*
R -1	408	
1	2	-3Aq
	6	-3A
-1	26	
+1	568	Cq
+	308	*Divisor.*

Signum R est -. At - 1|26 minor est quam 1|568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis Exempli poſterioris in Monito ſecundo.

67681-1c = 214273

214	273	(47, Duo prima latera
67	68	Cq
-64		-Ac
+270	72	CqA
+206	72	*Ablatit.*
R + 7	553	
-4	8	-3Aq
--	12	-3A
--4	92	
+6	768	Cq
+1	848	*Diviſor.*

Signum R eſt+. At Diviſor ex A lateris gradibus negativus, minor eſt Diviſore Coëfficiente affirmativo; hoc eſt --4|92 minor eſt quam +6|768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

De Logarithmis.

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed ſatis luculentèr præſertim pro tribus prioribus Numerationis ſpeciebus, ſcilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, ſi Indices ſint affirmativi, à communi integro-

grorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio fractionum	$\left\{\begin{array}{l} \frac{13}{17} \cdot 1{,}11394. \\ \phantom{\frac{13}{17}} \cdot 1{,}23045. \end{array}\right.$	Et	$\left\{\begin{array}{l} \frac{15}{32} \cdot 1{,}17609 \\ \phantom{\frac{15}{32}} \cdot 1{,}50515 \end{array}\right.$
	Log. $\bar{1}{,}88349$		Log. $\bar{1}{,}67094$

Additio.		Subductio.	
Ad	$\bar{1}{,}88349$	Ex	$\bar{1}{,}88349$
adde	$\bar{1}{,}67094$	tolle	$\bar{1}{,}67094$
Sum	$\bar{1}{,}55443$	Rest	$0{,}21255$

Multiplicatio.

Lateris $0{,}0064$	Lateris $0{,}0064$
$3 \times \bar{3}{,}80614$	$2 \times \bar{3}{,}80614$
Cubus $\bar{7}{,}41842$	Quadr. $\bar{5}{,}61228$

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2, 3, 4, 5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores.		
2)	$\bar{1} . \bar{2}$	$\bar{1}$
	$\bar{3} . \bar{4}$	$\bar{2}$
	$\bar{5} . \bar{6}$	$\bar{3}$
	$\bar{7} . \bar{8}$	$\bar{4}$
3)	$\bar{1} . \bar{2} . \bar{3}$	$\bar{1}$
	$\bar{4} . \bar{5} . \bar{6}$	$\bar{2}$
	$\bar{7} . \bar{8} . \bar{9}$	$\bar{3}$
&c 4)	$\bar{1} . \bar{2} . \bar{3} . \bar{4}$	$\bar{1}$
	$\bar{5} . \bar{6} . \bar{7} . \bar{8}$	$\bar{2}$
5)	$\bar{1} . \bar{2} . \bar{3} . \bar{4} . \bar{5}$	$\bar{1}$
	$\bar{6} . \bar{7} . \bar{8} . \bar{9} . \overline{10}$	$\bar{2}$
	40. 30. 20. 10.0	

In hac Tabella Diviſores ſunt à ſiniſtrà intra lineam flexam.

Tum verſus dextram ſequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in ſingulis ordinibus collaterales adſtant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui ſcribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Oſtendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur ſupra in eàdem columnà, juxta Diviſorem. Ut ſi Logarithmus $\bar{7}$, 41842 poſtuletur dividi per 3: Quæratur $\bar{7}$, juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 ſubtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipſum 24: in quo Diviſor 3 octiès continetur.

Diviſio.

3) $\bar{7}$, 4 1 8 4 2	2) $\bar{5}$, 6 1 2 2 8
Latus $\bar{3}$, 8 0 6 1 4	Latus, $\bar{3}$, 8 0 6 1 4

FINIS.

ELEMENTI DECIMI

EUCLIDIS

DECLARATIO.

Necnon

De SOLIDIS REGULARIBUS

TRACTATUS.

Authore

GUILELMO OUGHTREDO

ANGLO.

OXONIÆ,

Excudebat *LEON. LICHFIELD.*

Anno Dom. M DC XC III.

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor.

Æquale =. Simile *Sim.*
Majus ⊏. Proxime majus ⊏.
Minus ⊐. Proxime minus ⊐.
Non majus ⊏. Æquale vel minus ⊑.
Non minus ⊐. Æquale vel majus ⊒.
Proportio, sive ratio æqualis : :
Major ratio ∵. Minor ratio ∴.
Continuè proportionales ∺.
Commensurabilia ⊓.
Incommensurabilia ⊓.
Commensurabilia potentiâ ⊓.
Incommensurabilia potentiâ ⊓.
Rationale, ῥητὸν, R, vel ῥ.
Irrationale, ἄλογον, ἀρ.
Medium sive mediale μ.
Linea secta secundum extremam & mediam rationem } ς
Major ejus portio σ;
Minor ejus portio τ.
Z est A+E. ζ est a+e.
X est A-E ξ est a-e
Z est Aq+Eq. ζ est aq+eq.
X est Aq-Eq. ξ est aq-eq.
Æ est AE rectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. □ quadratum.
△ Triang. ℞ latus, sive radix.
μ media proportionalis.

∽ est differentia duarum magnitudinum, ut B ∽ C significet vel B-C, vel C-B. in 113, 114 e 10.

ELEMENTI

ELEMENTI DECIMI
EUCLIDIS
Declaratio.

AD def. 1. Eandem menſuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipſarum quoti menſuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commenſurabiles igitur magnitudines ſunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit: quales ſunt in genere quadratico, radices quadratæ, planorum ſimilium: & in genere cubico, radices cubicæ ſolidorum ſimilium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe 3×6, &5×10, ſimilibus (eſt enim 3. 6 :: 5. 10) √q 18, & √q50 ſunt latera commenſurabilia; quia diviſa per √q2 maximam eorum communem menſuram, dant √q9 & √q25, hoc eſt 3 & 5. Sunt igitur √q 18 & √q50 in ratione 3 ad 5. Quippe 18 & 50 ſunt ut Q. Q.

Ad def. 2. √q 12 & √q64 ſunt latera incommenſurabilia: nam quamvis ad minores terminos poterunt reduci per √q4 maximam eorum communem menſuram; fientque √q3 & √q16: non tamen dicuntur commenſurabilia;

bilia; quia non ſunt ut numerus ad numerum. Eſt enim $\surd q3$ numerus non verus, ſed ſurdus. Quippe 12 & 64 non ſunt ut Q. Q.

Ad def. 3. At vero linearum ſive laterum $\surd q12$ & $\surd q64$, quadrata 12 & 64 ſunt commenſurabilia; quia area 1 utrumque metitur: nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipſam aream 1, continet ſexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum ſunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc ſequitur, quod omne latus ſurdum generis quadratici numero rationali, ſive vero cuicunque, potentiâ eſt commenſurabile: modo ſi intelligantur ejuſdem eſſe generis ſive dimenſionis: At ſi unum ex iis intelligatur eſſe latus ſive linea, & alterum planum ſive ſuperficies, non erunt commenſurabilia potentiâ.

Ad def. 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommenſurabiles diverſorum generum: nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quadratica, altera quadratoquadratica. Exempli gratia, laterum $\surd q3$ & $\surd q2$ quadrata ſunt 3 & 2: & inter ipſa planum medium proportionale $\surd q6$. Quare plana ſive potentiæ 3 & 2 incommenſurabilia ſunt ad planum $\surd q6$. Ideoque ipſorum latera $\surd q3$ & $\surd q2$ ad $\surd qq6$ ſunt incommenſurabilia etiam potentiâ. Atque hujuſmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides poſtea Media ſive Medialia nuncupat.

$\surd q3. \quad \surd q2.$
$3. \quad \surd q6. \quad 2.$
$\surd q3. \ \surd qq6. \ \surd q2.$

Ad def. 5. Si linea propoſita vero numero ſit

ſit explicabilis ; omnes lineæ veris numeris explicabiles, ſunt ipſi commenſurabiles. Si verò linea propoſita ſit latus ſurdum, puta $\surd$q3, linea illi quacunque ratione commenſurabilis invenitur per proportionem. Ut ſi ratio data ſit 2 ad 5: Dic 2. 5 :: $\surd$q3. $\surd$q $\frac{75}{4}$.

Dicitur ῥητὴ, ſive rationalis, linea vero numero explicabilis ; ratione cujus aliæ lineæ ad ipſam comparatæ, conſiderantur vel commenſurabiles vel incommenſurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perſpectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum ſub ꝛ & ıꝛ eſt ıꝛ. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat ſpeciem.

2. Si linea Z ſecetur inæqualiter in A & E, erit Z--2AE=Xq. Et Z+2AE=Zq.

3. Si linea Z componatur tum ex A+E, tum ex a+e : erit Z-ʒ=2æ-2Æ. Nam Z+2Æ =ʒ+2æ.

Item, ſi linea X conſtituatur tum ex A-E, tum ex a-e : erit Z-ʒ=2Æ--2æ. Nam Z-2Æ =ʒ--2æ.

4. A. E :: Aq. Æ :: Æ. Eq.

5. Si A & E ſint ⊐⊢ : erunt 1°, Aq, Eq, Z, X, ⊐⊏ : ideoque ſimul ꝛ vel mꝛ.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⊐⊏ 2Æ. per 4.

Erunt 3°; Z, 2Æ, Zq, Xq ⊐⊏

Erunt

Erunt 4°, X., 2Æ, Zq, Xq '⊓. Nam Zq=Z +2Æ: & Xq=Z--2Æ. & Zq=4Æ+Xq.

6. Si A & E ⊤, erunt Aq, Eq, Zq, Æ, Z, X, Xq ⊤.

Propositiones Elementi Xi.

9. Novem priores propositiones docent lineas commensurabiles esse, ut numerus ad numerum, atque ideo eorum quadrata esse, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommensurabilibus autem contra esse. Earum enim quadrata non sunt ut Q.Q. √q45 & √q20 sunt lineæ commensurabiles, quia ipsarum quadrata 45 & 20 sunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices sunt 3 & 2, sunt igitur √q45 & √q20 in ratione 3 ad 2.

Coroll. ad 9. Lineæ ⊓ sunt etiam ⊤ at non contra. Sed lineæ '⊓ non sunt idcirco ⊤.

10. Si sit B. C :: D. F. sintque B, C ⊓ vel '⊓: etiam D, F ⊓ vel '⊓ erunt.

12. 14. Si B. ⊓ C, & C, D ⊓ vel '⊓, etiam B, D ⊓ vel '⊓ erunt.

13. Si B ⊓ D; & C '⊓ D: erit B '⊓ C.

Coroll. ad 14. Si B '⊓ C; at B ⊓ D, & C ⊓ F: erit D '⊓ F.

16. 17. A, E, Z sunt simul ⊓ vel '⊓.

11. Invenire B, D '⊓: & B, C ⊤. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non sint ut Q. Q. fiatque 3. 2 :: B. F: Item B. D :: D. F. Quare B. F :: Bq. Dq. At B, F non sunt Q. Q: ideoque nec Bq. Dq. sunt ut Q. Q. Ergo B, D '⊓ per 9.

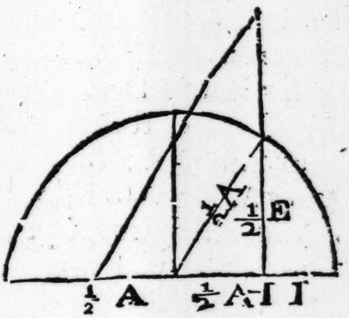
Iterum

Iterum fiat B. C::C. D: ſunt igitur Bq. Cq ⊓⊔: quare B, C ⊓⊤. √q3. √qq6. √q2.

Coroll. ad 11. μ inter duas ⊓⊔, eſt utrivis ipſarum ⊓⊤; & ῥ, ſi alterutra ex iis ſit ῥ.

15. Si ſit A,E::a. e. & ſit A ⊓⊔ √q: Aq-Eq; ſcil, X: erit etiam a ⊓⊔ √q: aq-eq: ſcil. ☿. Nam Aq. Eq :: aq. eq: quare Aq. Aq-Eq::aq. aq -eq. Ergo per 10.

18. 19. Si ſint duæ lineæ A & E: adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato ſemiſſis E, deficiens figura quadrata: hoc eſt, dividatur A in duas partes A-I & I, ſic ut ▭ᵐ ſegmentorum æquetur □° $\frac{1}{2}$ E; nempe AI-Iq $= \frac{1}{4}$ Eq. & ſint ſegmenta A-I & I ⊓⊔. Erit etiam A ⊓⊔ √q: Aq-Eq. & converſe: & contra. Nam per 47 e 1, $\frac{1}{4}$ Aq- $\frac{1}{4}$ Eq= Q: $\frac{1}{2}$ A-I: quare √q: Aq-Eq: eſt A-2I. At per 16 & hypoth. A-2I, & A ſunt ⊓⊔.



22. 23. Ex A, E ῥ ⊓⊔ fit ÆῥÆ, ſcil. μ. & √qÆ, eſt ῥ & μ, (vide annotata ad def. 4.) Nam A. E::Aq. Æ. quare Æ ⊓⊔ Aqῥ, erit ῥ. Eſt etiam Æ μ. Nam ſi A ſit √q3, & E √q2; erit Æ √q6 planum, cujus radix eſt √qq6. At vero tum quadrata 3, √q6, 2; tum ipſorum radices √q3, √qq6, √q2. ſunt ∸ & in neutris medius terminus eſt ejuſdem rationis ſive commenſurationis cum ſuis extremis, ſed utrique incommenſurabilis.

24. Si

24. Si ſit B ⅎ ſaltem ipſi C mr, erit etiam B mr. Nam ad expoſitam R per 23, fiat RD= Cq mr, & RF=Bq. Quare RD⊏RF: ideoque F, D ɤ ⊏. Eſt autem per 23. R⊏D: idcirco etiam R⊏F. Ergo Bq mr: atque ipſa B mr.

20. 21. 25. Ex A, E ɤ ⊏, fit Æ ſimiliter ɤ: & converſè. Et ex A, E mr ⊏, fit Æ mr: & converſè. Nam A. E::Aq. Æ. At Aq eſt ɤ vel mr. ergo & Æ ſimiliter ɤ vel mr, per 24.

26. Ex A, E mr ⅎ, fit Æ ɤ vel mr. Nam ad expoſitam R, fiat RB=Aq: & RC=Æ: & RD =Eq. Sunt igitur B, D, ɤ ⊏, per 23. Et quia C eſt m ∻ inter B & D erit Cq ɤ ideoque & ipſa C ɤ. Si vero C ɤ ⊏ R, erit Æ mr.

27. Si □^{m} B mr conſtet ex □^{o} C mr, & □D: erit etiam □^{m} D ɤ. At non converſè. Nam aliter fingatur □D ɤ. Ad expoſitam R fiat RA =□^{m} C mr; & RE=□^{m} D; & RZ=□B mr. Erit igitur Z ɤ ⊏ R: & A ɤ ⊏ R: & E ɤ ⊏ R. Quare A, E ɤ ⊏. Eſtque Z ɤ. At per lem: 5. Z⊏Zq. Eſt igitur Zq ɤ, & Z ɤ: quod oſtenſum eſt falſum. Ergo.

28. Invenire duas A, E mr ⅎ, ita ut Æ ſit ɤ. Sumantur B, C ɤ ⅎ: fiatque B. A::A. C::C. E. Dico I°, A, E mr: Nam Aq=BC mr, per 22. eſtque B. C::A. E. Dico II° A, E mr ⅎ: Nam B. C::A. E. Quare per 24. Dico III° Æ ɤ: Nam AE= Cq ɤ.

29. Invenire duas A, E mr ⅎ, ita ut Æ ſit mr. Sumantur B, C, D ɤ ⅎ: fiatque B. E::E. D::A. C. Dico I°, A, E mr. Nam Eq=BD mr. Dico II°, A, E mr ⅎ: Nam D. C::E. A. Dico III°, Æ mr: Nam AE=BC mr.

Ex

Exemplum pro 28. B2. C√q3. A√qq 12. E√qq$\frac{27}{4}$. AE3.

Exemplum pro 29. B√q5. C2. D√q3. E√qq15. A√qq$\frac{80}{3}$. AE √ 20.

30. Invenire duas A, E ɤ ⊐, ita ut A ⊓ sit √qX. Sumantur duo numeri quadrati aq, eq; ita ut aq-eq non sit Q. Tum expositâ A ɤ, fiat aq. aq-eq :: Aq. Eq. Erit igitur etiam aq. eq:: Aq. X., per 19 e 5.

Dico I°, A, E ɤ ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊓ √qX.: Nam sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq sunt 9. eq & X. 4.

31. Invenire duas A, E ɤ ⊐, ita ut A ⊓ √qX.. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati; ita ut aq+eq non sit Q. Tum exposita A ɤ, fiat aq+eq. aq:: Aq. Eq. Erit igitur aq+eq. eq:: Aq. X., per 19 e 5.

Dico I° A, E ɤ ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊓ √qX.: Nam Aq, X. non sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 31 Aq & aq 4. eq & X. 1.

32. Invenire duas A, E mɤ ⊐, ita ut Æ sit ɤ; & A ⊓ √qX.. Sumantur per 30, duæ a, e ɤ ⊐, ita ut a ⊓ √q: aq-eq. fiatque a. A:: A. e::e. E. Dico I°, A, E mɤ ⊐, per 22 & 24. Nam Aq=ae mɤ: & a. e:: A. E; ⊐. Dico II°, Æ ɤ: Nam AE=eq ɤ. Dico III°, A ⊓ √qX., per 15. Nam a ⊓ √q: aq-eq. Exemplum a 2. e√q3. A√qq 12. E√qq$\frac{27}{4}$.

Quod si per 31, Sumerentur a, e ɤ ⊐; ita ut

a

a □ √q : aq-eq : Inventæ fuerint A, E ϻ ƺ, ita ut Æ sit ϰ, & A □ √qX.

Exemplum a √q5. e 2. A √qq20. E √qq$\frac{64}{5}$.

33. Invenire duas A, E ϻ ƺ, ita ut Æ sit ϻ; & A □ √qX. Sumantur per 30, duæ a, e ϰ ƺ; ita ut a □ sit √q:aq-eq: & sumatur i ϰ ƺ utrique a, e : fiatque a. A::A.i::e. E. Dico I°, A, E ϻ ƺ: Nam Aq=a i ϻ: Estque a. e::A. E. Dico II° Æ ϻ. Nam AE=ie ϻ. Dico III°, A □ √qX: Nam a □ √q: aq-eq: quare per 15.

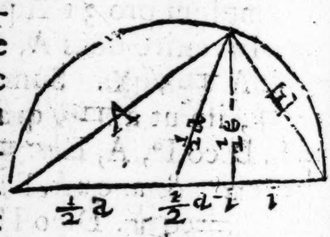
Exemplum a 2. e √q5. i √q2. A √qq8. E √qq$\frac{2}{5}$

Quod si per 31, sumerentur a, e ϰ ƺ, ita ut a □ √q : aq-eq : Inventæ fuerint A, E ϻ ƺ, ita ut Æ sit ϻ : & A □ √qX.

Exemplum, a √q5. e 2. A √qq20. E √qq$\frac{16}{5}$.

Præparatio ad propositiones 34, 35, 36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q.$\frac{1}{2}$e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil. a in a-i & i; ita ut a-i.$\frac{1}{2}$e::$\frac{1}{2}$e.i. Erit $\frac{1}{2}$ a-i = √u : $\frac{1}{4}$ aq-$\frac{1}{4}$ eq: sicut in schemate apparet. Atq; per hanc interpretationem, a-i =$\frac{1}{2}$ a + √u : $\frac{1}{4}$ aq-$\frac{1}{4}$eq- & i=$\frac{1}{2}$a-√u: $\frac{1}{4}$ q-$\frac{1}{4}$ eq.



Et quia Aq=Q: a-i: + $\frac{1}{4}$ eq. & Eq = iq + $\frac{1}{4}$ eq. Nempe Q. $\frac{1}{2}$ a ± √u : $\frac{1}{4}$ aq-$\frac{1}{4}$ eq: + $\frac{1}{4}$ eq. Hac adhibita interpretatione

Erit

Erit A$=\sqrt{}$u : $\frac{1}{4}$ aq+$\sqrt{}$u : $\frac{1}{4}$ aqq-$\frac{1}{4}$aqeq.
Et E$=\sqrt{}$u : $\frac{1}{2}$ aq--$\sqrt{}$u : $\frac{1}{4}$ aqq--$\frac{1}{4}$ aqeq.

Nam in quadratione lineæ $\frac{1}{2}$ a $\pm$ $\sqrt{}$ u : $\frac{1}{4}$ aq --$\frac{1}{4}$ eq. Z eſt $\frac{1}{4}$ aq+ $\frac{1}{4}$ aq-- $\frac{1}{4}$ eq. Et Æ eſt $\sqrt{}$u: $\frac{1}{16}$ aqq-$\frac{1}{16}$aqeq : quod duplicatum fiet $\sqrt{}$u : $\frac{1}{4}$aqq- $\frac{1}{4}$ aqeq. huic ſi adjungatur + $\frac{1}{4}$ eq ; abolebitur alterum -$\frac{1}{4}$ eq.

Lemma ſecundum : a--i.i:: Aq.Eq, ⊐.

Nam a. A::A. a--i } Quare { a.a--i::aq. Aq.
Et a. E::E. i } Quare { a. i::aq.Eq.

Lemma tertium : a.A::E. $\frac{1}{2}$ e.

34. Invenire duas A, E Ⴗ, ita ut Z ſit ɤ,& Æ mɤ. Sumantur per 31, a, e ɤ Ⴗ, ita ut a ⊐.$\sqrt{}$q : aq-eq : & ex ipſis inveniantur A, E, Sicut in *Lem. pri.*

Dico I° A,E Ⴗ:Nam per *Lem. ſec.*Aq,Eq ⊐.

Dico II° Z ɤ : Nam in 31, A, E (quibus hic reſpondent a, e) ſunt ɤ Ⴗ.

Dico III°, Æ mɤ. Nam per *Lem. tert.* AE =$\frac{1}{2}$ a e mɤ.

35. Invenire duas A, E Ⴗ, ita ut Z ſit mɤ, & Æ ɤ. Sumantur per 32, a, e mɤ Ⴗ, ita ut æ ſit ɤ, & a ⊐.$\sqrt{}$q:aq- eq. & ex ipſis inveniantur A, E, ſicut in *lem. pri.*

Dico I° A, E Ⴗ, per *Lem. ſecun.*

Dico II°, Z mɤ, per 32.

Dico III°, Æ ɤ : Nam per *lem. tert.* AE =$\frac{1}{2}$ ae. ɤ.

36. Invenire duas A, E Ⴗ, ita in Z & Æ ſint mɤ. Sumantur per 33, a, e mɤ Ⴗ, ita ut æ mɤ, & a ⊐ $\sqrt{}$q:aq--eq. & ex ipſis inveniantur A, E, ſicut in *Lem. pri.*

Dico

Dico I°, A, E ꟻ, per *lem. sec.*

Dico II° Z mr, per 33.

Dico III°, Æ mr: per *lem. tert.* Consulatur etiam Schema pro hisce tribus propositionibus.

Coroll. ad 36: Hinc inveniri possunt duæ lineæ mr ꟻ, scil. √qZ, & √qÆ.

Principium Senariorum per Compositionem.

37. Si sumantur a, e ɤ ꟻ; tota a+e hoc est ʒ, erit ɤ; vocaturque *Binomium*, scil. 2℞ *Bin. I.* Nam per lemma 5, ʒq ⊐ ʒ, ɤ.

2+√q3. Cujus Q: est 7+√q48.

38. Si sumantur a, e mr ꟻ (per 28) ita ut æ sit ɤ, tota ʒ erit ɤ; vocaturq; *Bimediale* prius, scil. 2℞ *Bin.* II. Nam per lemma 5, ʒq ⊐ æ ɤ.

√qq12+√qq$\frac{27}{4}$. Cujus Q. est √q $\frac{147}{4}$+6.

39. Si (per 29) sumantur a, e mr ꟻ, ita ut æ sit mr: tota ʒ erit ɤ: vocaturque *Bimediale* posterius, scil. 2℞ *Bin:* III. Nam ʒq, hoc est ʒ,+2æ, est ɤ. Nam exposita R, fiat RT=ʒq; & RP=ʒ, mr, per 16 & 24: Erit RT-RP =2æ. Sunt autem per lem. 5, RP & RT-RP mr ⊐, Quare P, T-P ɤ ⊐ ad R. Et per 37, T est ɤ. Et per lem. 1, RT hoc est ʒq ɤ.

√qq$\frac{80}{3}$+√qq 15. Cujus Q: est √q$\frac{245}{3}$+√q80

40. Si (per 34) sumantur a, e ꟻ ita ut ʒ, sit ɤ, & æ mr; tota ʒ erit ɤ; vocaturque Major, scil. 2℞ *Bin.* IV. Nam per lem. 6, ʒq ⊐ ʒ, ɤ.

√u: $\frac{5}{2}$+√q $\frac{5}{4}$. pl. √u: $\frac{5}{2}$-√ $\frac{5}{4}$. Q. est 5+√q20.

41. Si (per 35) sumantur a, e ꟻ, ita ut ʒ, sit mr, & æ ɤ; tota ʒ erit ɤ, vocaturque *Po-*

Potens rationale & mediale, ſcil. ꝝ *Bin.* V. Nam per lem. 6, ʒ q⊐ æϒ.

√u: √q5 +1 : pl. √u: √q5-1. Q. eſt √q20+4.

42. Si (per 36) a, e '⊐, ita ut ʒ & æ ſint mr '⊐; tota ʒ erit 'ϒ, vocaturque *Potens duo medialia.* Scil. ꝝ *Bin.* VI. Nam ʒq, hoc eſt $ʒ_1$+2æ eſt 'ϒ. Expoſita enim R, fiant RT=ʒq, & RP=$ʒ_1$. erit RT-RP=2æ. Sunt autem RT. & RT-RP mr '⊐ Quare per 22, P, T-P ϒ '⊐ ad R. Et per 37 T eſt 'ϒ. Et per lem. 1, RT hoc eſt ʒq'ϒ. Ergo ʒ 'ϒ.

√u: √q5+√q3: pl. √u ; √q5-√q3. Q. eſt √q20 +√q8.

43. 44. 45. 46. 47. 48 Neque ulla ex dictis ſex lineis 'ϒ, ʒ poteſt dividi in ſua nomina a, e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterum ʒ in ſua nomina A, E. Erit (per lem. 3) Z-$ʒ_1$=2æ-2Æ. At (per 37 & 40) in ꝝ *Bin.* I, IV. Z-$ʒ_1$ eſt ϒ: & 2 æ -2Æ mr, per 27. Et (per 38 & 41) in ꝝ *Bin.* II, V, Z--$ʒ_1$ eſt mr; & 2æ--2Æ ϒ. Quare eadem quantitas erit ϒ & 'ϒ Quod eſt abſurdum. In ꝝ vero *Bin.* III, VI, Quoniam in 39 & 42, ſi ſupponantur 'ϒ ʒ dividi in a, e ; fiatque RT =ʒq, & RT-RP=2æ; demonſtratum eſt 'ϒ T dividi in nomina P, T-P ϒ⊐. Item ſi iterum ſupponatur 'ϒ ʒ dividi in A, E, alia nomina; fiatque RT=ʒq, & RS=Z & RT-RS=2Æ; ſimiliter demonſtrabitur 'ϒ T dividi iterum in nomina S & T-S ϒ'⊐, diverſa ab iis P & T-P. Quod eſt contra priorem partem hujus demonſtrationis. Eſt enim 'ϒ T *Binomium.*

De-

Definitiones		&	Proprietates	
2æ	*Binom.* & *Apotom.*		*Binom.* & *Apotom.*	
I	a, e ɤ ɥ : æ m̃		A ⊐ √qX. A ⊐ R	ɤ⊐
II	a, e m̃ ɥ : æ ɤ		A ⊐ √qX. E ⊐ R	
III	a, e m̃ ɥ : æ m̃		A ⊐ √qX. A, E ⊐ R	
IV	a, e ɥ : ʒ ɤ : æ m̃		A ⊐ √qX. A ⊐ R	A.E
V	a, e ɥ : ʒ m̃ : æ ɤ		A ⊐ √qX. E ⊐ R	
VI	a, e ɥ : ʒ & æ m̃ ⊐		A ⊐ √qX. A, E ⊐ R	

49, 50, 51, 52, 53, 54. Invenire ſex *Binomia* A+E. Sumatur N [9] & dividatur tum in 5 & [4] tum in 6 & 3: & exponatur R. [9] [4] ſcil. numeri quadrati.

Pro *Bin.* I. IV. Sit A ⊐ R; fiatque [9]. $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq.

Pro *Bin.* II. V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$. [9]: Eq. Aq.

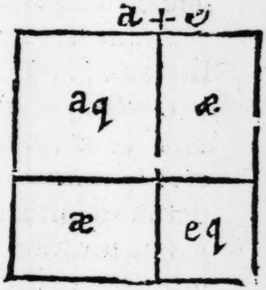
Pro *Bin.* III. VI. Sumatur tertius N 2, qui nec ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q. Q. fiatque 2. [9]:: Rq. Aq ɤ. Deinde [9]. $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq: qui non ſunt ut Q. Q. Quare in omnibus ſex ſunt Aq, Eq, ɤ ⊐; & A, E ɤ ɥ. Item quia 9-5=4; & 9-6=3, erit [9]. [4] :: Aq. X: ideoque A, √X ⊐, ⊐.

3

55. 56. 57. 58. 59. 60. Si ſingula ſex *Binomia* A+E ducantur in expoſitum R, √q : AR+ER: conſtituet ordine ſingulas ſpecies 2æ *Binom.* Nam (conſideratis prius intentè proprietatibus cujuſque tum *Binomii*, tum 2æ *Bin.* in tabella præmiſſa) dividatur A in A-I & I, ita ut

AI-

AI-Iq= $\frac{1}{4}$ Eq. Erit igitur A-I. $\frac{1}{2}$ E :: $\frac{1}{2}$ E. I. fiat etiam aq=AR-IR : & eq=IR.



Probatur I°, a+e esse √q: AR+ER. Est enim AR-IR. $\frac{1}{2}$ ER:: $\frac{1}{2}$ ER. IR : Item aq.æ::æ.eq. Quare $\frac{1}{2}$ ER=æ. Ergo Q. a+e : =AR+ER.

Probatur II°, In tribus prioribus *Binom.* a, e, esse ⌐ʒ. Nam quia (per 18) AR-IR⌐⊐IR, erit AR-IR ⌐⊐ AR : at (per *lem.* 5.) AR ⌐ʒ ER : ergo AR-IR ⌐ʒ ER : hoc est aq ⌐ʒ æ : Est autem aq. æ::a. e.

In tribus posterioribus *Binom.* a, e esse ⌐ʒ. Nam (per 19) AR-IR, IR, hoc est aq, eq ⌐⊐.

Probatur III°, In *Binom.* I. a, e esse ɤ. Nam AR-IR, IR, hoc est aq, eq⌐⊐ sunt AR ɤ.

In *Bin.* II, a, e esse mʼ: Nam quia A-I, I⌐⊐ A⌐ʒR ; Erit AR-IR, IR, hoc est aq, eq mʼ : at a, e ⌐ʒ. Item æ esse ɤ : Nam 2æ=ER ɤ.

In *Bin.* III, a, e esse mʼ, ut ante. Item æ esse ɤ: Nam ER, hoc est 2æ, mʼ, quia Eɤ⌐⊐ R.

In *Bin.*IV. aq+eq, hoc est AR, esse ɤ. Nam Aɤ⌐⊐R· Item 2æ, hoc est ER,esse mʼ: ut ante.

In *Bin.* V. aq+eq, hoc est AR, esse mʼ. Nam

Aɤ⌐ʒ.

A ⊐- ɼ. Item 2æ, hoc est ER, esse ɼ. Nam E ɼ ⊓-R.

In *Bin.* VI. aq+eq, hoc est AR; Item 2æ, hoc est ER, esse mɼ. Nam A, E ɼ ⊓-R.

Atque in omnibus his tribus posterioribus liquet a & e esse ⊐-, quia aq, eq ⊓-.

Consect. Latus quadratum singulorum *Binomiorum* A+E constituet ordine singulas species 2æ *Bin.* a+e. Nam posita R. esse 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A-I cujus latus est a: & minus I, cujus latus est e. Ostensum autem est ad prop. 34, in lem. pri. A-I esse $\frac{1}{2}$ A+√u: $\frac{1}{4}$Aq--$\frac{1}{4}$Eq. Et I esse $\frac{1}{2}$A-√u : $\frac{1}{2}$ Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Atque hinc patet Analysis *Binomii*: cujus hæc est regula.

Si è quadrato semissis nominis majoris tollatur quadratum semissis nominis minoris: & latus quadratum excessus semissi nominis majoris addatur, dabit quadratum majus: sin detrahatur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, 2æ *Bin.* erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61. 62. 63. 64. 65. 66. Si quadratum ex ɼ a+e, 2æ *Bin.* aliqua, ad expositam R applicetur latitudinem facit A+E, idem *Binomium*. Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER=Q: a+e: Et AR-IR=aq. Et IR=eq: ideoque ER =2æ. Probatur 1°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓- √ qX:

qX. : Nam a, e 'ᒣ; quare AR-IR, IR '⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse '⊓ √qX. : Nam a, e sunt '⊓ : quare AR-IR, IR '⊓. Ergo.

Probatur IIo, A, E esse ɣ ᒣ, &c. Nam in *Bin.* I. A est ɣ⊓ R ; & E ɣ '⊓R : est enim AR, hoc est aq+eq ɣ. & ER, hoc est 2æ '⊓ aq+eq, per lem. 5.

In *Bin.* II, E est ɣ ⊓R ; & A ɣ'⊓R. Est enim ER, hoc est 2æ ɣ ; Et AR, hoc est, aq+eq, '⊓æ, per lem. 5.

In *Bin.* III, A & E sunt ɣ⊓R : Est enim AR, hoc est ʒ, ; & ER, hoc est, 2æ, mɣ.

In *Bin.* IV, A est ɣ⊓R : & E ɣ'⊓ R ; est enim AR, hoc est ʒ, ɣ ; & ER, hoc est, 2æ, mɣ. Et

In *Bin.* V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊓ sit B+C ; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C::A.B::E. C, ⊓, & quia A, E, ɣᒣ, etiam B, Cɣᒣ. per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq-Eq⊓ sit vel '⊓; Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊓ vel '⊓.

68. Si in 2e *Bin.* II. III, a+e ⊓ b+c : Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a. b::e.c, ⊓. Sunt autem a, e mɣᒣ : Ergo b, c, mɣᒣ per 24. Item a. e::aq. æ. Et b. c::bq.bc : quare aq.bq::æ.bc, ⊓. Ergo si æ ɣ sit vel mɣ ; Etiam bc ɣ vel mɣ erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus 2e *Bin.*

Bin. a+e ⊐ b+c: Erit ℞ *Bin.* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b::e.c, ⊐ ſaltem. Sunt autem a,e ⊐. Ergo b, c ⊐. Item quia aq. bq ::eq.cq::aq+eq. bq+cq, ⊐ ſaltem: Si aq+eq ꝛ vel *mr*; etiam bq+cq.erit ꝛ vel *mr*. Denique quia aq. æ::a. e::b.c::bq. bc; erit aq. bq::æ. bc, ⊐ ſaltem: Si æ ꝛ ſit vel *mr*; etiam bc ꝛ vel *mr* erit.

72,73. Si duo ſpacia ζ & 2æ componantur, quorum unum eſt ꝛ, & alterum mediale; ſitque ꝛ majus; recta totum ſpacium potens erit ℞ *Bin.*I.vel IV. Sin *mr* majus; recta totum ſpacium potens erit ℞ *Bin.* II, vel V. Si vero duo ſpacia *mr* ⊐ componantur: recta totum ſpacium potens erit ℞ *Bin.* III, vel VI. Nam ſi ad expoſitam R adplicetur AR+ER= ζ+2æ, conjunctim & ſeorſim, nempe AR=ζ: & ER=2æ; ſive unum ex ipſis ſit ꝛ, & alterum *mr*: ſive utrumque *mr* ⊐. Clarum erit AR, ER eſſe ⊐; ideoque A, E, ꝛ ⊐. Quare ſi A⊐√qX, erit A+E unum ex tribus prioribus *Binomiis*. Si verò A⊐√qX, erit A+E unum ex tribus poſterioribus *Binomiis*. Quodcunque autem ex ipſis ſex fuerit; latus illius (quod etiam eſt √u: ζ+2æ:) erit ℞ *Binom.* ordine idem per 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Principium Senariorum per detractionem.

74, 75, 76, 77, 78, 79. Si ab a majore nomine cujuſvis ℞ *Bin.* auferatur e nomen minus. Reliquum a-e erit ꝛ, ℞ *Apotome* ejuſdem

dem ordinis: vocaturque *vel Apotome*, *vel Residuum mediale primum*, *vel Residuum mediale secundum*, *vel Minor*, *vel Cum rationali totum mediale faciens*, *vel Cum mediali totum mediale faciens.*

Nam Idem probari potest de ℰq, quod de ʒq probatum fuit, in 37, 38, 40, 41. Sed pro ♃ *Apot.* III. vel VI, ad expositam R, fiant RP=ℰq: & RT=ʒ: Et RT-RP=2æ. Et reliqua fiant sicut in 39. & 42. Nam ʒ-2æ = ℰq.

80,81,82,83,84,85. Lineis hisce sex ɤ a-e, ♃ *Apot.* una tantum congruit recta linea e, pro minore nomine. Nam aliter constituatur linea ℰ, nempe a-e, etiam ex A-E. Per lem. 3, Z-ʒ=2Æ-2æ: At in ♃ *Apot.* I. IV. Z-ʒ est ɤ, & 2Æ-2æ est *mr*. Et in ♃ *Apot.* II. V. Z-ʒ est *mr*: & 2Æ--æ est ɤ (per 37, 38, 40, 41.) quare eadem quantitas est ɤ & ɤ: quod est absurdum: In ♃ vero *Apot.* III. VI. Quoniam (sicut est in 45 & 48) Si supponatur ɤ ℰ constitui ex a, e; fiatque RP=ℰq; RT=ʒ: & RT-RP=2æ: demonstratum est ɤ P constitui ex nominibus T, T-P, ɤ⊤. Item si iterum supponatur ɤ ℰ constitui ex A, E, aliis nominibus; fiatque RP=ℰq: RC=ʒ: & RC-RP=2æ. Similiter demonstrabitur ɤP constitui ex nominibus C, C-P (diversis à T & T-P) ɤ⊤. Quod est contra priorem partem hujus demonstrationis. Est enim ɤP *Apotome.*

86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111.	demonstrantur verbati fere de 2, & sicut de 2	49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73.

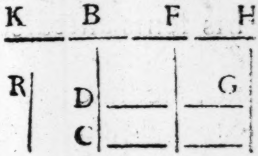
112. Eadem linea ɤ non est *Apotome*, & *Binomium*. Nam esto A *Apotome*, puta 2ℓ *Apot.* I. Exposita R, fiat R×BC=Aq. quare per 98 & 61, BC erit *Apotome* I. ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD ɤ ⊣; & majus nomen BD ⊐ R. Rursus ponatur A *Binomium*, puta *Rad. Bin.* I. fiatque R×BC=Aq: Erit per 61 BC *Bin.* I. cujus nomina sunt BE, CE, ɤ ⊣; & BE ⊐ R. Sunt igitur & per 16, BD, BE, ED ɤ ⊐: ideoque ED, CD ɤ ⊣: quare CE *Apot.* ɤ. At CE fuit & ɤ. Quod est absurdum.

113, 114. Rq applicatum ad *Binomium*, latitudinem facit *Apotomen*. Sed applicatum ad *Apotomen*, latitudinem facit *Binomium*. Utrobique autem nomina sunt ⊐ proportionalia, & utriusque ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF=Rq=DC×BH ɤ ⊐. Est igitur BC.DC :: BH.BF. Et (BC ~ DC) BD. DC :: (BH ~ BF) FH. BF. His sic ordinatis,

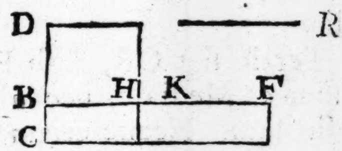
Pro 113, Esto *Binomium* aliquod BC, scil. BD + DC: fiatque FH-BF. BF::BF. BK. Est igitur (BF+BK) FK.BK::FH.BF::BD.DC, ɤ ⊣.

Quare

Quare FK, BK ꝗ. Item (FK+FH) HK.FK:: (BK+BF) FK.BK, ꝗ. Et HK. BK::HKq. FKq::FKq. BKq ⊤⊤. Unde & per 16, HK,BK,BH ⊤⊤ : At BH ɤ : quare HK, BK ɤ ⊤⊤ : Et FK, BK ɤ ꝗ. Ergo per def. FK--BK, scilicet BF est *Apotome*.



Pro 114. Esto *Apotome* aliqua BC, scil. DC--BD: fiatque FH.BF::HK.FK:: (FH-HK. BF-FK) FK.BK::FH.BF::BD.DC ɤ ꝗ. Quare HK.FK::FK. BK ꝗ: Et HKq, FKq ⊤⊤. Unde & per 16, HK,BK,BH ⊤⊤. At BH ɤ: Itaque BK ɤ, & FK,BK ɤ ꝗ. Ergo per def. BK+FK, scil. FB, est *Binomium*.

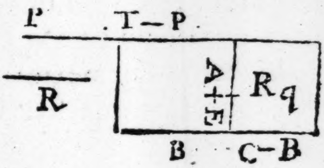


Secundò DC,BK ⊤⊤ : Et BD,FK ⊤⊤. Nam BK ⊤⊤ BH ⊤⊤ DC. Et DC.BK::BD.FK. Ergo

Tertio Proportionalia.

Quarto sunt in eodem ordine; per 15. & 14.

115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina sint ⊤⊤ & proportionalia: Nempe T. A ⊤⊤ :: P.E ⊤⊤ : Dico ▯ T-P in A + E esse ɤ. Nam exposita R, fiat A+E in C-B=Rq. Est igitur C-B *Apotome*; Et A, C ⊤⊤ :: E. B ⊤⊤. per 113: Quare C.T ⊤⊤::C-B.T-P ⊤⊤:: A+E in C-B ɤ. A+E in T-P etiam ɤ. Et √q: A+E in T-P: ɤ.



116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ɣr, quæ nec Mediæ sunt, nec ullæ ex bis senis antedictis. Nam exposita R, fiat MR; & sit N=√qMR. Dico N esse ɣr, per lem. 1. at nec mediale; per 23. nec ullam ex bis senis, per 61, 62, 63, 64, 65, 66, & 98, 99, 100, 101, 102, 103.

Deinde fiat RN. & sit O=√q RN: Dico O ɣr nec Mediale esse, nec ullam ex bis senis illis.

Tertio fiat OR, & sit P=√qOR: Dico P ɣr esse nec Mediale, nec ullam, &c. Et sic in infinitum. Neque etiam ɣr N, O sunt eædem. Nam N=√qMR. & O=√qNR. &c.

117. Diameter quadrati est lateri incommensurabilis: Nam alias si sit ⊐⊏; esto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L; sintque minimi termini in eadem ratione: Et ipsorum quadrata sunt verè numeri quadrati. At verò L non potest esse 1; quia quadratum diametri ad quadratum lateris est ut 2 ad 1: ideoque 2 esset numerus verè quadratus. Nec potest L esse numerus aliquis multitudinis: quia cùm sit Dq.Lq::2.1; & Lq metiatur Dq; etiam L. metietur D: ideoque D & L non erunt rationis suæ termini minimi: Est enim numerus multitudinis, maxima utriusque communis mensura.

Finis Elementi Decimi EUCLIDIS.

De
Solidis Regularibus,
Tractatus.

1. FIGURA quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam eſt numerus laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula: quinquangulum in tria, &c.

2. Quare ſi è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur: vel ſi è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis *ſummam angulorum rectorum* in rectilinea quavis figura interius comprehenſorum. Sic triangulum intra ſe continet duos rectos: quadrangulum quatuor, quinquangulum ſex: &c.

3. Figuræ autem cujuſvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare ſi quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, ſive angulorum: quotus erit quantitas *unius anguli exterioris*, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato eſt $\frac{4}{3}$ recti, ſive grad. $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{4}$: in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis: vel ſi ſumma angulorum re-

ctorum interiorum dividatur in numerum laterum: habebis quantitatem ***unius anguli interioris***, in figura rectilinea ordinata. Sequitur pars prior ex 4: posterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius interioris quantitas est $2 - \frac{4}{8}$ vel Gra. $180 - \frac{360}{8}$. Item 8) 12($1\frac{1}{2}$ recti: vel Gra. 8) 12×90(135.

6. Numerus angulorum planorum in solido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius basis in numerum basium. Nempe anguli plani sunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6: in (8), 3×8: in (20), 3×20: in (12), 5×12.

7. Numerus angulorum solidorum in solido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in solido illo, per numerum angulorum planorum circa unum angulum solidum. Nempe anguli solidi sunt in (4), $\frac{3 \times 4}{3}$: in (6), $\frac{4 \times 6}{3}$: in (8) $\frac{3 \times 8}{4}$: in (20), $\frac{3 \times 20}{5}$: in (12), $\frac{5 \times 12}{3}$.

8. Numerus linearum lateralium in solido quovis regulari, est semis numeri angulorum planorum in illo solido. Atque hic etiam est numerus rectangulorum, sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus. Nā unaquæq; linea lateralis duobus inservit angulis.

9. Quare rectangulum sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus, est superficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Est 6 & 7 e 14.

10. So-

10. Solidum quodque regulare æquale eſt ſuperficiei ſuæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro ſuo in baſem.

11. Si linea ς ſecetur ſecundum extremam & mediam rationem, ut σ ſit majus ſegmentum, & τ minus: Dico $\sigma q = \varsigma\tau = \sigma\tau + \tau q$. per 11 & 3 e 2.

12. $Q{:}\ \frac{1}{2}\varsigma + \sigma{:} = 5Q{:}\ \frac{1}{2}\varsigma$. Nempe $\frac{1}{4}\varsigma q + \varsigma\sigma + (\sigma q)\ \varsigma\tau$. Eſt 1 & 2 e 13.

13. $Q{:}\ \frac{1}{2}\sigma + \tau{:} = 5Q\ \frac{1}{2}\sigma$. Nempe $\frac{1}{4}\sigma q + (\sigma\tau + \tau q)\ \varsigma\tau$. Eſt 3 e 13.

Quare $\sigma . \tau :: \tau . \sigma - \tau$. Nam (per 11.) $\sigma q - \sigma\tau = \tau q$.

14. $\varsigma q + \tau q = 3\sigma q$. Nempe $\sigma q + (2\sigma\tau + \tau q + \tau q)\ 2\varsigma\tau$. Eſt 4 e 13.

15. $\varsigma + \sigma . \varsigma :: \varsigma . \sigma$. Nempe $\varsigma + \varsigma . \varsigma :: \sigma + \tau . \sigma$. Eſt 5 e 13.

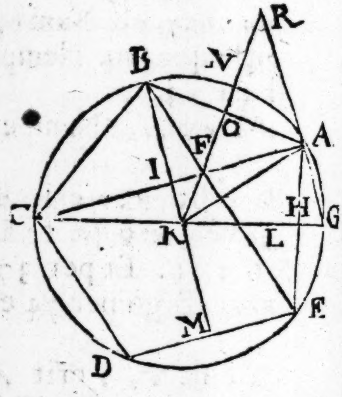
16. Si ς ſit ℞, σ erit *Apotome*. Nam quia per 12, $\frac{1}{2}\varsigma + \sigma . \frac{1}{2}\varsigma :: \sqrt{q}5 . 1$. Erunt $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma$, $\frac{1}{2}\varsigma$ ℞ ⊐, per def. 6 e 10. Et per 37 e 10, erit $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma + \frac{1}{2}\varsigma$ *Binomium*. Ergo per 74 e 10, $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma - \frac{1}{2}\varsigma$ *Apot.* hoc eſt σ.

Item ſi ς ſit ℞, τ erit *Apotome*. Nam per 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma ℞}$ (hoc eſt τ) *Apot.* Vide 11. Eſt 6 e 13.

17. Si ς ſit ſubtendens angulum pentagoni ordinati; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC.CF::CF.AF: At CF=CB=AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang. = $\frac{10}{5}$ recti: è quibus ang. BCF= $\frac{2}{5}$ recti; & ang. CBF= $\frac{4}{5}$ recti: tertius igitur ang. CFB= $\frac{4}{5}$ recti: quare CF=CB=AB. Et quia liquet tri. ACB, BAF ſim: Erit AC. AB::AB. AF: Ergo. Eſt 8 e 13.

Conſect. Et ſi ex angulo B per centrum, ad oppoſitum latus pentagoni, ducatur BKM, ſe-cans ipſam AC in I: ſecabitur etiam linea BM ſecundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela eſt FI: erit per 2 e 6, IM. IB::FE. BF::CF. FA. Ergo.

18. Sit circuli alicujus radius σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC=2GAN, erit ang. RKG=KGA=KAG; ideoque tri: RGK, KAG ſim. Eſtque RG. KG::KG. AG. Atque AR=KG, quia ang. ½ RKG =KRG. Secatur igitur RG ſecundum mediam & extremam rationē in puncto A. Ergo latus decagoni AG eſt minus ſegmentum. Eſt 9 e 13. Quare etiam ſi ς ſit Radius, erit σ latus decagoni.



19. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur ſemiſummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO=½RG=½KR. Nam quia KR=RG; ſublato utrinque radio, manebit RN=AG. Eſtque KO=RO, per 2 e 3. Eſt 1 e 14.

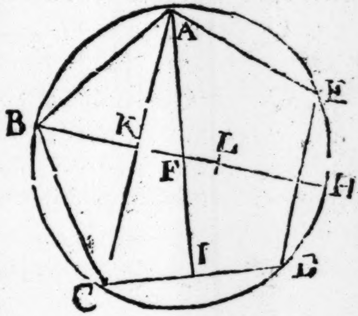
20. Quadratum lateris pentagoni ordinati minus quadrato Radii, æquatur quadrato late-

ri

ris decagoni: Nempe AEq-KGq=AGq. Nam quia AHq+GHq=AGq: Et quia KG secatur med. & extr. ratione in L; estque KL=AG: LH=HG. Erit AEq+GLq=4AGq: Et per 14. KGq+GLq=3AGq. Fiat subductio. Est 10 e 13.

21. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ subtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in schemate præcedente, AEq+CAq=5KCq. Nā CAq+AGq=4KGq: & per 20, AEq-AGq=KGq. Fiat additio. Est hæc 3 e 14.

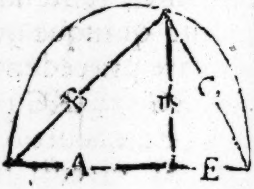
22. Si circuli Radius sit rationalis, latus pentagoni inscripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang. rect. AIC, AKF sim. erit CI.$\frac{1}{2}$AC::KF.$\frac{1}{2}$AF: ideoque 2CI. CK::KF. $\frac{1}{2}$AF=FL, quia quadrans est Radii: Et CD+CK.CK::KL.FL.



At per 17, si CD sit σ, CK erit $\frac{1}{2}\varsigma$: quare si FK sit σ, FL erit $\frac{1}{2}\varsigma$: & per 12, KLq=5FLq. Est autem BLq=25FLq. quare BL. KL::√q25. √q5, ꝛ ꝑ, per def. 6 e 10: Et sic ipsorum quadrata: unde etiam BLq. BLq-KLq::25. (25-5) 20::5.4: Et BL.√u: BLq-KLq::√q5. 2, ꝛ. Quare BL-KL, nempe BK, est ꝛ *Apot.* IV, per def. & 47 e 10. quippe ostensum est, A, E ꝛ ꝑ; A ꝛ √X; & A ꝛ R. Item BCq

=BKq+CKq=BKq+BK×KH (per 35 e 3) = $\surd$ BK×$\surd$BH. Ergo per 95 e 10, BC est Minor. Est 11 e 13.

23. In triang. rectang. cujus Hypotenusa Z dividitur in segmenta A, E, perpendiculari ex angulo recto demissa, Erit 1°, ZA=Bq: & ZE=Cq. & AE=πq.



II°, A. E:: Aq. πq:: πq. Eq:: Bq. Cq.

III, Z. A:: Zq. Bq:: Bq. Aq:: Cq. πq.

IV°, Z. E:: Zq. Cq:: Cq. Eq:: Bq. πq.

24. Si triangulum æquilaterum inscribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoq; altitudo Δi, sive perpendicularis è vertice in basem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii.

2°, Q: dia. Q: lat. Δi:: 4. 3: ideoque Q. Rad. Q: lat: Δi:: 1. 3. Est 12 e 13.

3°, Q: lat. Q: alt. Δ:: 4. 3. sc. 3. $\frac{9}{4}$. Est 12 e 14.

4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & semissem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Est 29 e 14.

5°. Q: lat: Δi. Q: perpend. à cent: in bas:: 3 $\frac{1}{4}$. Est 18 e 14.

25. Si quadratum inscribatur circulo: latus ipsius erit $\sqrt{2}$: Et Q: lat: □i. Q: dia :: 1. 2.

26. Si eidem circulo inscribatur, tum triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q: lat: Δi. Q: lat: □i :3. 2: per 24 2°, & 25.

2°, Q: alt: Δi. Q: lat: □i:: 9. 8: per 24 3°, & 26 1°.

3°

3°, △. □ :: √27. 8 : scil. $\sqrt{\frac{27}{16}}$. √4.

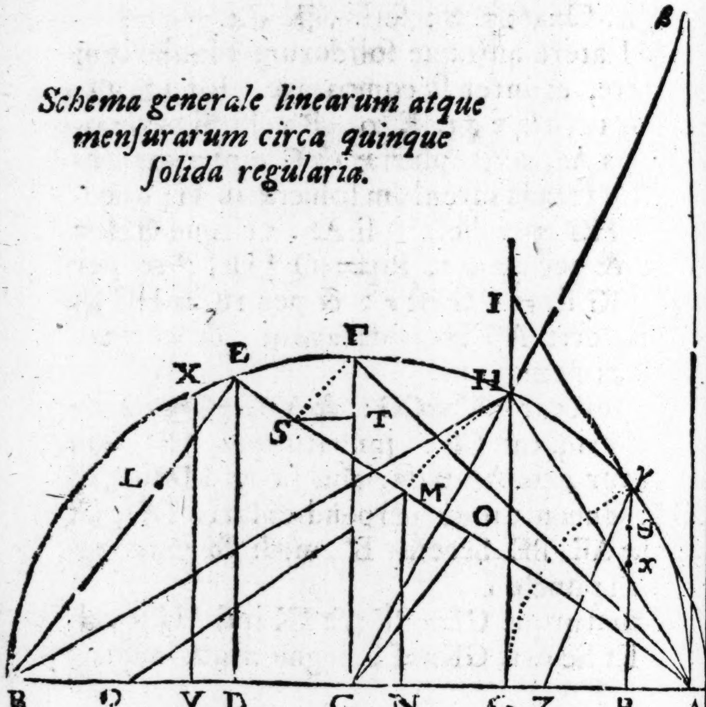
27. Latera quinque ſolidorum regularium exponere, & inter ſe comparare. Eſt 13, 14, 15, 16, 17, 18, e 13. Eſto AB vel ipſi perpendicularis Aβ, axis ſphæræ, & C centrum: ducatur Cβ ſecans circulum ſphæræ in H; ducaturque HG parallela ipſi Aβ: eritque GH = 2CG; & per 47 e 1, Rq = 5Q: ½ HG; & per 12, ſi HG ſit ς, AG eſt σ; & per 18, ſi HG ſit Radius, erit AG latus decagoni; & per 20, AH latus pentagoni.

Menſuretur CV = CG; & VX = GH. Et e centro erigatur CF: jungaturque AF. tum dividatur axis AB trifariam, ſic ut BD ſit ⅓, & AD ⅔: ducanturque perpendicularis DE, & chordæ AE, BE. Secetur BE med: & extr. ratione in puncto L.

Statuaturque GI = BE; & IK ipſi AH parallela: Et ſic erit GK = BL ſegmentum majus.

Schema

Schema generale linearum atque mensurarum circa quinque solida regularia.



His diligenter memoriæ mandatis, ad ipsa quinq; corpora regularia declaranda pergemus.

28. De Tetraëdro. Latus (4) est AE; & DE Radius circuli ambientis basem ipsius triangulam. Nam per 23 4°, AEq. DEq::AB. BD: 3. 1::Q: lat: Δ^{i}. Q: Rad: per 24 2°. Et CD est perpendicularis è centro sphæræ in basem, scil. $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{2}$ DE est perpendicularis è centro basis in latus, per 24 1°.

29. De Hexaëdro. Latus (6) Est BE vel GI. Nam per 23 4°, ABq. BEq::AB. BD::3.1. Ergo ABq

ABq=3BEq (hoc eſt quadratum diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris) Eſtque per 25, Q: lat. □i. Q: dia. circ. :: 1. 2 : : BEq. AEq. Quare $\frac{1}{2}$ AE eſt Radius circuli ambientis baſem triangulam (6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$ BE æquatur perpendiculari, tum è centro ſphæræ in baſem, tum è centro baſis in latus. Denique quia ABq. BEq::6. 2 :: Q: axis. Q: lat: (6): Erit 2 Q: axis=6Q: lat (6); quæ ſuperficies eſt Cubica.

30. De Octaëdro. Latus (8) eſt AF vel AS. Nam (8) conſtat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo eſt ſemiaxis: & Q: axis. Q:lat (8)::2. 1. Et quia per 24 2°, Q:lat△i, quod eſt Q: lat (8). Q: diam: circuli ambientis :: 3. 4. Erit Q: axis. Q: diam::3. 2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq. CTq :: ABq. BEq :: 3. 1 : Eſtque ASq=AFq=$\frac{1}{2}$ ABq : quare CTq=$\frac{1}{2}$BEq =$\frac{1}{4}$ AEq : ideoque CT=$\frac{1}{2}$ AE; qui radius eſt circuli ambientis tum baſem (6), tum baſem (8). Et ſi AS vel AF ſit latus △i, erit CT Radius circuli ambientis per 24 2° : Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro △i in latus, per 24 1°. Eſt autem ſuperficies (6)=12BE×$\frac{1}{2}$BE: & ſuperficies(8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod ſatis liquet: Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT::ſuperf. (6). ſuperf. (8)::BE. AC. Quoniam AFq. ACq::BEq. CTq=$\frac{1}{2}$BEq.

31. De Icoſaëdro. Latus (20) eſt AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli deſcribi, perpendiculariter inſiſtentes plano AHXB : atque in ipſis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG : ſic ut punctum H

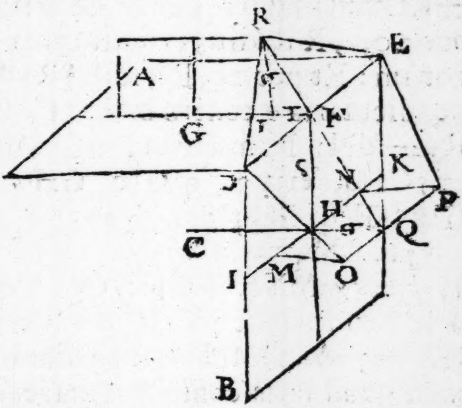
ſit

sit angulus pentagoni, & X decagoni: unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad distantiam GV=GH. Et è singulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenusæ ad angulos alterius utrinque proximos: Item ex singulis angulis utriusque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenusæ: quæ quidem omnes, hypotenusæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis est Radio GH, & basis lateri decagoni AG; ideoque singulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare descripta erit figura constans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes sphæra, patet ex angulo H; nam circumvolutus semicirculus AHXB reliquos similiter angulis perstringet. Est igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & 𝔯 quia 5. 1:: CHq. GHq: est autem CH=$\frac{1}{2}$ AB, & CG =$\frac{1}{2}$ GH: Atque idcirco A H latus (20) est 𝔯, nempe Minor, per 25. Tum demissa MN perpendiculari in axem, statuatur MQ=AC, $\frac{1}{2}$ axis: erit MN Radius circuli circa basem, per 24 2°; quia AM. MN::AE.DE::3.1: Et $\frac{1}{2}$ MN perpendicularis è centro basis in latus, per 24 1°: Et NQ perpendicularis è centro sphæræ in basem; quia ibi Q est instar centri sphæræ. Denique BEq. GHq::5. 3: Nam BEq. ABq::1.3: & ABq. GHq::CHq.CGq::5. 1.

32. De Dodecaëdro. Latus (12) est BL vel GK, in præcedente schemate: & BE vel Gl

(la-

(latus (6)) subtendit angulum basis pentagonæ (12). Nam in sequente schemate, describantur duæ bases (6), AD, EB, quarum commune latus est DE; & centrum sphæræ C; & centrum basis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipsi DE parallela. Erunt igitur GF, HI, HK, semisses lateris (6): secentur singulæ in στ punctis L, M, N; ut majus segmentum sit ubique centro proximũ: & in punctis, L, M, N, erigantur tres perpendiculares LR, MO, NP, æquales ipsi majori segmento: & ducatur OP, latus (12): est enim IK. OP::ς.σ::BE. BL, schematis præcedentis. Ducantur etiam DO, DR, EP, ER, quæ cum OP includunt pentagonum, basem quidem (12). Nam



1°. Pentagonum DOPER est in uno plano: Est enim RFQ una recta linea, per 32 e 6.

2°. Est æquilaterum: est enim DOq=MOq pl. DI q+Mq, hoc est, 3MOq, per 14. At etiam 4MOq=OPq. Et sic de cæteris.

3°. Est æquiangulum. Est enim DPq=DIq pl. INq + NPq, hoc est, 3DIq. per 15 & 14. At

At etiam 4 DIq = DEq. Et sic de cæteris.

4°, Circumscribitur sphæræ; Est enim CPq = CQq+QPq, hoc est, 3CHq, per 15 & 14. At Q: axis. Q: lat (6) :: 3.1 :: Q: $\frac{1}{2}$ axis. Q: $\frac{1}{2}$ lat (6). Et sic de reliquis.

5°, Circa (6) describentur 12 ejusmodi pentagona. Cum enim per II, sint in (6) latera 12 unicuique lateri suum ahærebit pentagonum; sicut intuenti perspicuum erit.

6°, Latus (12) est Apotome: Est enim DE latus (6) ⅌ ꝗ axi: at per 16, si ς (DE) sit ⅌, σ (OP) erit Apotome.

His sic ostensis, ad prius illud schema redeundum denuò erit: In quo mensuretur Kγ = KG = BI lateri (12): & demittatur γR. Erit per 20, γR Radius circuli circa basem pentagonam: Et per 19, Rθ, scil. $\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, est perpendicularis è centro basis in latus. Est autem Rγ = MN: Nam quia (3BEq) 3GIq = Q: axis = 5GHq, erit 5. 3 :: GIq. GHq :: GKq. GAq :: GIq+GKq. GHq+GAq: hoc est, per 17 & 21: 5Rγq. AMq = 3MNq, per 23 IV°. Quare 3×5 Rγq = 5×3MNq. Estque QN perpendicularis à centro sphæræ in basem. Estque superficies (20) = 30AH×$\frac{1}{2}$MN: & superficies (12) = 30GK ×Rθ, quod satis constat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN. GK ×Rθ :: superf. (20). superf. (12) :: (20). (12).

33. Si axis sphæræ æqualis sit, tum $\sqrt{}$u: ςq +σq unius lineæ, tum $\sqrt{}$u: ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schemate priore generali, ς. σ :: GH. AG :: BH. AH: At ABq = BHq+AHq. Item ABq = 3BEq = Q: BE+BL: pl. BLq: hoc est 3ςq = Q: ς+σ: pl σq

pl σq. Eſt enim $\sigma q = \varsigma\tau$. Eſt 23 e 14.

34. $\sqrt{u{:}\varsigma q + \sigma q}.\ \sqrt{u{:}\varsigma q + \tau q} :: \text{lat}\,(6).\ \text{lat}\,(20)$. hoc eſt, $K\gamma.\ Z\gamma :: BE.\ AH$, vel $GI.\ AM$: ſecta ſcil. $KZ = R\gamma$ med: & extr. ratione in puncto R. Nam per 23 IV°, $AMq = 3R\gamma q$: Et per 17, $Z\gamma q = 3RKq$. Quare $AM.\ Z\gamma :: R\gamma.\ RK :: \varsigma.\sigma :: GI.\ KG$. Eſt 10 e 14.

35. Latus (6). Latus (20) :: ſuperf. (12). ſuperf. (20). hoc eſt $GI.\ AM :: KG \times R\theta.\ AM \times \frac{1}{2}R\gamma$. Nam $KG \times R\theta = GI \times \frac{1}{2}R\gamma$. Eſt enim $GI.\ KG :: \varsigma.\sigma :: R\gamma + RK.\ R\gamma :: (\frac{1}{4}R\gamma + \frac{1}{2}RK)\ R\theta.\ \frac{1}{2}R\gamma$, per 18. Eſt 9 e 14.

36. Q: perpendic. è centro ſphæræ in baſem (4). Q: perpend. è centro ſphæræ in baſem (8) :: 1. 3 :: CDq. $\frac{1}{4}$ BEq.

37. Q. lat (4). Q. lat (8) :: Baſis (4). Baſis (8). Nam AEq. ABq :: 2. 3: Et ABq. AFq :: 4. 2. Eſt 14 e 14. Hinc conſectarium eſt,

Quod, Superf. (4). ſuperf. (8) :: 2. 3: ſcil. $4 \times 4.\ 8 \times 3$.

38. Q: (4). Q: (8) :: 4. 27. per 36 & conſect. 37. Nempe $\times \left\{ \begin{matrix} 1.\ 3 \\ 4.\ 9 \end{matrix} \right\}$. Eſt 17 e 14.

39. Baſis (6). Baſis (8) :: $8.\sqrt{27}$: Nempe $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}$.

40. Baſis (4). Baſis (6) :: $\sqrt{3}.2$ :: altit. $\triangle^i$ (4). latus $\triangle^i$ (4): nempe $\frac{1}{2}$ BE. AE. Eſt 30 e 14.

41. Superf. (4). Superf. (6) :: $1.\sqrt{3}$: Nempe $\sqrt{\frac{4}{3}} \times 4.\ 8$: hoc eſt, $\triangle^m$ (4) $\times 4$. 2Q: axis.

42. Tria (4) = (6): per 41 & 36: Nempe $\times \left\{ \begin{matrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{matrix} \right.$ eſt 32 e 14. Hinc conſectarium eſt,

Quod $\left\{ \begin{array}{l} \text{Priſma baſis \& altitudinis (4) = (6). Et} \\ \text{Pyramis baſis \& altitudinis (6) = (4).} \end{array} \right.$

43.

43. (8). 3(4) :: latus (8). latus (4): Nempe 2. ($\sqrt{\frac{16}{27}} \times 3$) $\sqrt{\frac{16}{3}}$ :: $\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Est 22 e 14.

44. Si latus (8) $= \sqrt{u}$: σq + τq, erit latus (20) $= \sqrt{}$ 2τq. Nam BH+HA secatur med: & extr: ratione in H: Estque 2σq + 2τq = 2 AFq = ABq = BHq + AHq. Ergo AHq = 2σq. Est 24 e 14.

45. Si latus (8) $= \sqrt{u}$: $\frac{1}{2}$ςq + $\frac{1}{2}$τq, Erit latus (12) = τ. Nam GI+GH secatur med. & extr. ratione in G: Estque ςq + σq = 2 AFq = ABq = 3GIq = Q: GI+GK: + GKq. Ergo GKq = τq. Est hæc 25 e 14.

46. Si latus (4) $= \sqrt{u}$: σq + τ, erit latus (20) $= \sqrt{\frac{3}{2}}$σq. Nam BH+HA secatur media & extr. ratione in H: & $\frac{3}{2}$ σq + $\frac{3}{2}$ τq = $\frac{3}{2}$AEq = ABq = BHq + AHq. Ergo AHq = $\frac{3}{2}$τq. Est hæc 26 e 14.

47. Si latus (6) $= \sqrt{u}$: σq + τq, erit latus (20) $= \sqrt{}$ 3σq. Nam BH+AH secatur med. & extr. ratione in H: & 3σq + 3τq = 3GIq = ABq = BHq + AHq. Ergo AHq = 3σq.

48. Si latus (6) $= \sqrt{u}$: ςq + τq, erit latus (12) $= \sqrt{}$ 3τq. Nam GI+GK secatur med. & extr. ratione in H: & 3ςq + σq = 3GIq = Q: GI+GK: + GKq. Ergo GKq = 3τq.

49. Si axis sphæræ sit ♈, superficis tum (4), tum (8), erit ɱ̃. Nam quia 3. 2 :: Q: axis. AEq: erit Q: lat. (4) = $\frac{2}{3}$Q: axis: est etiam: Q: lat. (8) = $\frac{1}{2}$Q: axis: scil. utrumque ♈: quare & ipsorum latera sunt ♈. At in △°, per 24 3°, Latus. altitud :: 2. $\sqrt{3}$, ♈ ꟼ. ergo per 22 e 10, area △ⁱ est ɱ̃. Est 13 e 14.

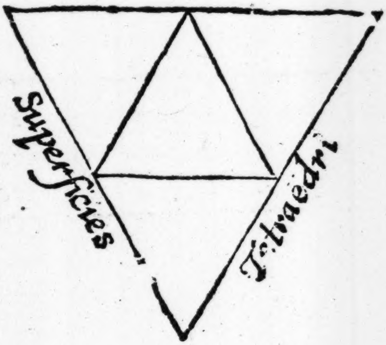
Notandū autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus reg. scripta sunt, propositionū numerus est juxta Ch. Clavium.

Corpo-

Corporum quinque regularium mensuræ, ad axem sphæræ 2. Consulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

AE latus (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1|632932.
DE ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0|942809.
Altitudo baſis (4), eſt 1|414213.
Area baſis (4), eſt 1|154657.
Superficies (4), eſt 4|618628.
CD perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (4), eſt $\frac{1}{3}$, 0|333333.
Soliditas (4), eſt 0|513216.

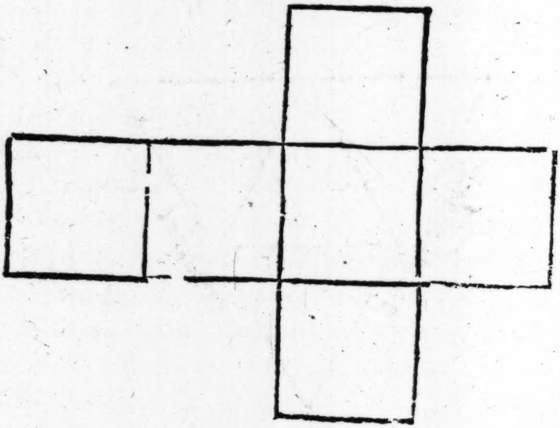


II. *In*

II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), eſt $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 1|154700.
CT eſt ſemidiameter circuli ambientis baſem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Area baſis (6), eſt $\frac{4}{3}$: 1|333333.
Superficies (6), eſt 8: Nempe bina quadrata axis ſphæræ.
$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro ſphæræ in Baſem (6) eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (6), eſt 1|539600.

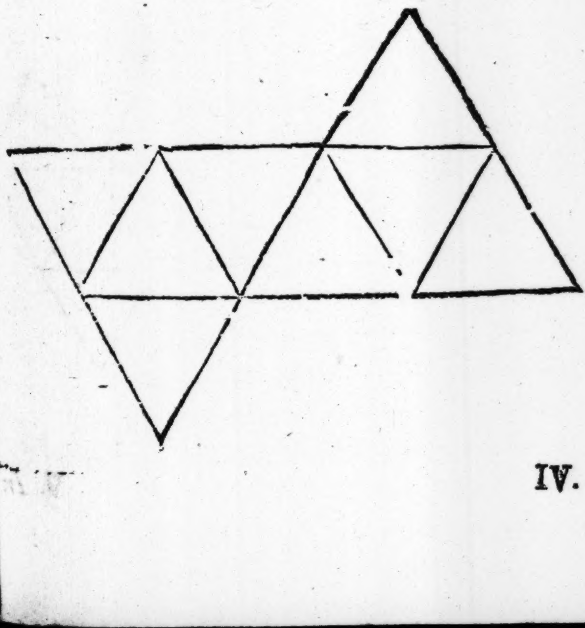
Superficies Hexaëdri.



III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), eſt $\sqrt{2}$: 1|414213.
CT eſt ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (8), eſt $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Altitudo baſis (8), eſt 1|224735.
Area baſis (8), eſt 0|866018.
Superficies (8), eſt 6|928144.
$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (8), eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (8), eſt 1|333333.

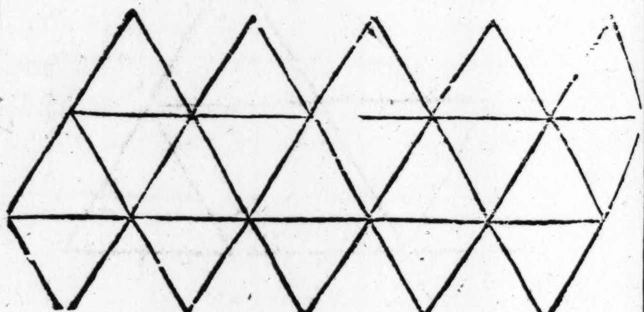
Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), eſt $\sqrt{u}: 2-\sqrt{\frac{4}{5}}$: 1|105573.
MN = Rγ ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (20), eſt $\sqrt{u}: \frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0|607061.
Altitudo baſis (20), eſt 0|910593.
Area baſis (20), eſt 0|503362.
Superficies (20), eſt 10|067240.
QN perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (20), eſt $\sqrt{u}: \frac{1}{3}+\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0|794654.
Soliditas (20), eſt 2|666658.
GH ſemidiameter circuli ambientis pentagonum (20), eſt $\sqrt{\frac{4}{5}}$: 0|894427.

Superficies Icoſaëdri.

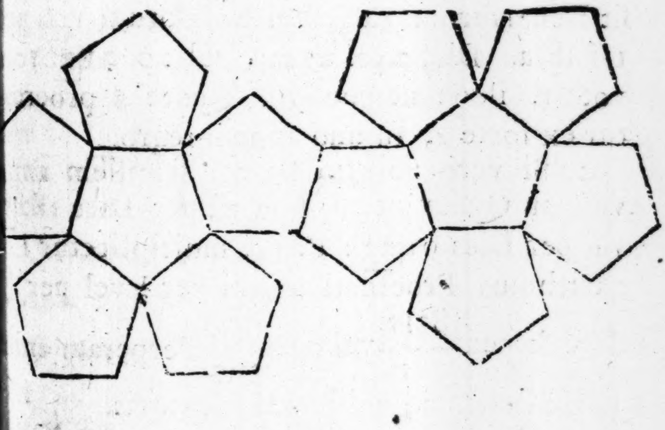


V. *In*

V. *In Dodecaëdro.*

GK=BL latus (12), eſt $\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|713642.
$R\gamma$=MN ſemidiameter circuli ambientis baſem quinquangulam (12), eſt $\sqrt{u:\ \frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|607062.
$R\theta=\frac{1}{2}R\gamma+\frac{1}{2}RK$, perpendicularis è centro baſis in latus, eſt 0|49112.
Area baſis (12), eſt 0|876211.
Superficies (12), eſt 10|514532.
QN perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (12), $\sqrt{u:\ \frac{1}{3}+\sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|794654.
Soliditas (12), eſt 2|785137.

Superficies Dodecaëdri.



FINIS.

De ANATOCISMO, Sive USURA COMPOSITA.

Hoc est, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæstiones omnes circa Anatocismum, facili negotio, solvi poterunt, investigatio Analytica.

Notandum autem est, quod Solidus Anglicus continet 12 *Denarios: Et Libra sive Mina continet* 20 *Solidos; Denarios verò* 240.

1. RAtio fœnoris reducenda primò est ad Rationem æqualem, cujus antecedens sit 100, vel 1. Ut si Ratio sit Denariorum 14|4, vel Solidorum 1|2. pro 1 Libra. Dic, 240. 254|4, vel 20. 21|2::100. 106::1. 1|06: nempe α. β. Quare β procreatur ex sorte α, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio sit per semissem anni, vel per Quadrantem, hoc est per Dies 182|5, vel per Dies 91|25: Pro β, multiplicetur Logarithmus Procreati annui per $\frac{1}{2}$ vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182|5.}{365}$ vel per $\frac{91|25}{365}$ Perperam enim vulgò sumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus termino-

minorum, sive Solutionum; erit numerus Rationum N-1. Item Logarithmus β ductus in N-1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex α sorte, sive 1^{lb}, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo. I. $1^{lb}.\ \beta\omega :: Q^{lb}.\ Q^{lb}$ cum lucro in N vicibus.

Theo. II. $\beta\omega.\ 1^{lb} :: Q^{lb}$ post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}=Z$, summæ omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque idcirco Procreatum ex pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus: Hinc duo oriuntur alia Theoremata.

Theo. III. $\beta-1.\ \beta\omega-1 :: Q^{lb}$. Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo. IV. $\beta\omega-1.\ \beta-1 :: Q^{lb}$ futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatum ex 1^{lb} elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$ procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numeratis æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega.\ 1^{lb} :: \frac{\beta\omega-1}{\beta-1}.\ \frac{\beta\omega-1}{\beta-1 \text{ in } \beta\omega}$ Unde igitur

tur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$ Pretiũ Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo. V. $\beta-1$ in $\beta\omega . \beta\omega-1$ :: Q^{lb} Pensio pro N vicibus. Pretiũ ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo. VI. $\beta\omega-1 . \beta-1$ in $\beta\omega$ :: Q^{lb} præsens. Pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Q^{lb} significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad 1|06. Estque N 20. Et Logar. 1|06 est 0|025306.

0, 025306 in $\frac{1}{2}$

0, 012653 Log. $\beta = 1|0296$.

20N

0, 253060 Log. $\beta\omega = 1|791$

$\bar{2}$, 471291 Log. $\beta-1 = 0|0296$.

$\bar{2}$, 724351 Log. $\beta-1$ in $\beta\omega$

$\bar{1}$, 898176 Log. $\beta\omega-1 = 0|791$.

Est igitur

$\bar{1}$, 898176

$\bar{2}$, 724351

$\bar{1}$, 173825 Logar. Pretii 14|92 ^{lb} pro Pens. 1 ^{lb}

$\bar{2}$, 724351

$\bar{1}$, 898176

$\bar{2}$, 826175 Log. Pensionis 0|06701 ^{lb} pro Pret. 1 ^{lb}.

Logarithmis hisce inventis adde Log. Q^{lb}. Vel valores hosce inventos multiplica per Q^{lb}.

REGU-

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

MUltiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum: Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe BApl.

Esto A-C Esto A-D
in B. BA-BC in B. BA-BD
Errores igitur sunt
BApl-BA+BC. BApl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nã sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC-BD:

BC defic.	BD defic.
A-D	A-C
BCA-BCD	BDA-BDC.

Hic etiam æqualibus utrinque per Subductionem

ctionem expunctis; Reductio fit ad BCA-BDA: quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

$$\text{Quare}\ \frac{BCA-BDA}{BC-BD}=A.$$

Iterum. Esto A+C. Esto A-D
in B.BA+BC. in B.BA-BD.
Errores igitur sunt,
BA+BC-BA pl. BA pl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt contraria; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident: Et sic manebit eorum summa, BC+BD.

BC exced.	BD defic.
A-D	A+C
BCA-BCD	BDA+BCD.

Hîc etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis; Reductio fit ad BCA+BDA: quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

$$\text{Quare}\ \frac{BCA+BDA}{BC+BD}=A.$$

FINIS.

THEOREMATUM
In LIBRIS
ARCHIMEDIS
De
SPHÆRA & CYLINDRO
Declaratio.

Authore
GUILELMO OUGHTREDO
ANGLO.

OXONIÆ,
Excudebat *LEON. LICHFIELD.*
Anno Dom. M DC XC III.

Rerum quarundam Denotationes.

R radius, eſt ſemidiameter circuli, ſive uno conſtet nomine AO, vel $E\omega$, vel IU: ſive duobus ut $AO+E\omega$, vel $E\omega+IU$: ut in ſchemate 1.

$\delta . \pi ::$ ſemidiameter. ſemiperipheria.

$\frac{\pi}{\delta}R$, eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt R.

$\frac{\pi}{\delta}:AO+E\omega:$ eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt $AO+E\omega$.

$\frac{\pi}{\delta}Rq$, eſt area circuli.

$\frac{\pi}{3\delta}Rq \times$ altitud. vel $\frac{\pi}{\delta}Rq$ in $\frac{1}{3}$ Altitud. eſt Conus, ſcil. $\frac{1}{3}$ Cylindri.

$\cap$ ſignificat ſuperficiem curvam.

Coni & Cylindri, qui in æqualibus ſunt baſibus ſunt ut altitudines. 14 e 12.

Æqualium Conorum & Cylindrorum baſes & altitudines reciprocantur. 15 e 12.

Aſſumo, Figuram regularem infinitorum laterum, cui nec major inſcribi, nec minor circumſcribi poterit; ſi plana ſit, eſſe circulum; ſin ſolida, eſſe ſphæram.

Theo-

Theorematum in Libris ARCHIMEDIS de *Sphæra* & *Cylindro* Declaratio.

Duodecim primas propoſitiones, quia demonſtrationibus negativis, (quas ego ut parùm ſcientificas, quantum poſſum, evito, inque ipſarum loco affirmativas ſubſtituo,) inſerviunt, miſſas faciam.

I. In Cylindro recto, Si 2 R, M, Latus; hoc eſt, 2AO, M, KA, $\div\!\!\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\frown$ Cylindri.

Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $= \frac{\pi}{\delta}$ 2AO $\times$ KA. 13 l 1.

(Ad ſeptem theoremata ſequentia pertinet ſchema I.)

II. In Cono æquicruro KON, ſi KO, M, AO $\div\!\!\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\frown$Coni. Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $= \frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 14 l. 1.

III. In Cono æquicruro KON, Dico eſſe ſemid. baſis. Latus :: Baſis. $\frown$ Coni. Nam AO. KO :: $\frac{\pi}{\delta}$ AOq. $\frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 15 l 1.

IV. In Cono æquicruro KON, Si $AO + E\omega$, M, $O\omega = KO - K\omega$ ∺: Dico $\frown$ frusti $O\omega\nu N = (\frac{\pi}{\delta} Mq) \frac{\pi}{\delta} : AO + E\omega : \times O\omega$. Nam per 2, $\frown$ $O\omega\nu N = \frac{\pi}{\delta} : AO \times KO :$ mi $\frac{\pi}{\delta} : E\omega \times K\omega : = \frac{\pi}{\delta} : AO + E\omega :$ in:$KO - K\omega$. Est enim $AO + E\omega$ in $KO - K\omega = AO \times KO - E\omega \times K\omega$ pl. $E\omega \times KO - AO \times K\omega$ quæ se invicem tollunt: Quia $AO . E\omega :: KO . K\omega$. 16 l 1.

V. In Cono æquicruro KON, Si KO, M, AO ∺; & AP perpendicularis lateri KO: Dico $(\frac{\pi}{3\delta} Mq) \frac{\pi}{3\delta} AO \times KO$ in $AP = \frac{\pi}{3\delta} AOq$ in $KA = KON$. Nam $KA . AP :: KO . AO :: AO \times KO . AOq$. Ergo. 17 l 1.

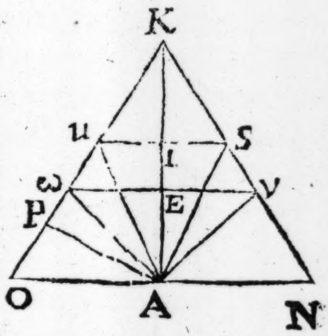
VI. In Cono æquicruro KON, Si $K\omega . M . E\omega$ ∺; & AP perpend. lateri KO: Dico $(\frac{\pi}{3\delta} Mq) \frac{\pi}{3\delta} E\omega \times K\omega$ in $AP = \frac{\pi}{3\delta} E\omega q \times KA$, scil. rhombo $K\omega A\nu$. Nam $KA . AP :: K\omega . E\omega :: E\omega \times K\omega . E\omega q$. Ergo. 18 l 1.

VII. In Cono æquicruro KON, Dico frustum Conicè excavatum $O\omega A\nu N$, æquari Cono cujus basis est æqualis $\frown$ frusti $O\omega\nu N$, & altitudo AP: hoc est, con: KON — rhomb: $K\omega A\nu = \frac{\pi}{\delta} : AO + E\omega : \times O\omega$ in $\frac{1}{3} AP$.

Nam

Nam $\frac{\pi}{\delta}$ $AO \times KO$ in $\frac{1}{3}$ $AP = KON$, per 5 } ho-
Et $\frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega$ in $\frac{1}{3}$ $AP =$ rhomb. $K\omega A\nu$, per 6 }
rum differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ $AO \times KO - \frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega$, per 4, $= \frac{\pi}{\delta}: AO + E\omega : \times O\omega = \cap\ O\omega\nu N$; ductis omnibus in $\frac{1}{3}$ AP. Ergo, &c.

VIII. In Cono æquicruro KON, Dico rhombum concicè excavatum $\omega UAS\nu$, æquari Cono cujus basis est æqualis $\cap$ frustri $\omega US\nu$ & altitudo AP: hoc est rhomb $K\omega A\nu$ - rhomb $KUAS = \frac{\pi}{\delta}: E\omega + IU : \times \omega U$ in $\frac{1}{3}$ AP.

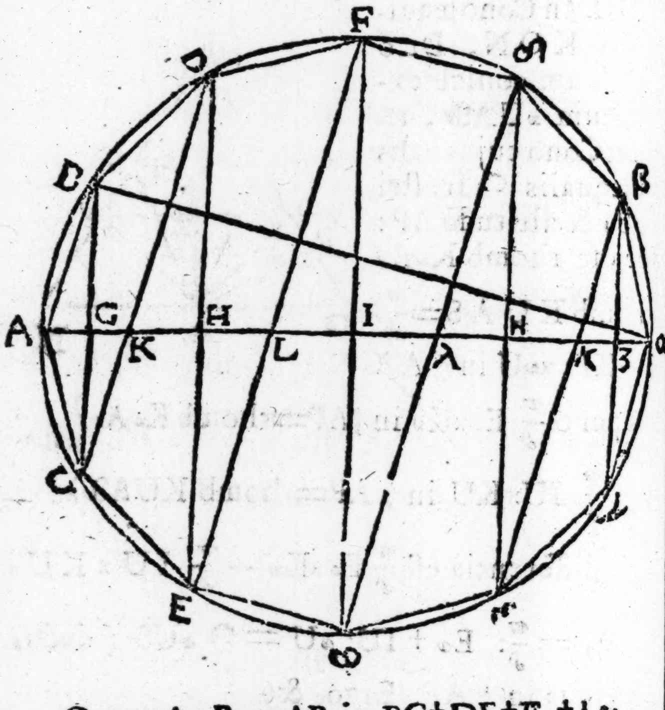


Nā per 6, $\frac{\pi}{\delta}$: $E\omega \times K\omega$ in $\frac{1}{3}$ $AP =$ rhomb $K\omega A\nu$ } ho-
Et $\frac{\pi}{\delta}$ $IU \times KU$ in $\frac{1}{3}$ $AP =$ rhomb KUAS }
rum differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega - \frac{\pi}{\delta}$ $IU \times KU$, per 4, $= \frac{\pi}{\delta}: E\omega + IU : \omega U = \cap\ \omega US\nu$; ductis omnibus in $\frac{1}{3}$ AP. Ergo, &c.

IX. Si figura plana polygona laterum æqualium & numero parium, ABDF $\alpha\beta\alpha\gamma\epsilon\varphi$ E C, in-

inſcribatur circulo, junganturque anguli rectis lineis parallelis: Dico $AB . B\alpha :: A\alpha . BC + DE + F\phi + \delta\epsilon + \beta\gamma$; hoc eſt, $2BC + 2DE + F\phi$. Nam $AB . B\alpha :: \frac{1}{2}AK . \frac{1}{2}BC :: \frac{1}{2}KL . \frac{1}{2}DE :: \frac{1}{2}L\lambda . \frac{1}{2}F\phi :: \frac{1}{2}\lambda\kappa \frac{1}{2}\delta\epsilon :: \frac{1}{2}\kappa\alpha . \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Quare $A\alpha \times B\alpha = AB$ in $2BC + 2DE + F\phi$. 21 l 1.
Et in ſegmento $A\delta\epsilon$, erit $AB . B\alpha :: A\eta . BC + DE + F\phi + \frac{1}{2}\delta\epsilon$.



Quare $A\eta \times B\alpha = AB$ in $BC + DE + F\phi + \frac{1}{2}\delta\epsilon$.

X. Si circulo, vel circuli ſegmento alicui, figura ejuſmodi plana polygona laterum æqua-

lium & parium, tum inſcribatur, tum circumſcribatur; & diametro Aα quieſcente, circulus circumvolvatur; deſcribetur figura ſolida conſtans ſuperficiebus quibuſdam Conicis: Et paralleli BC, DE, Fφ, δι, βγ, deſcribent totidem circulos parallelos. Atque in his, quæ circumſcripta eſt, ſive continens, major ſemper eſt circulo incluſo: & quæ inſcripta eſt, minor ſemper erit circulo ambiente. Et ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ ſimilis, eſt in ratione laterum duplicata: At figura ipſa ſolida circumſcripta, ad ſolidam ſimilem inſcriptam, in ratione triplicata. 22. 27. 30. 34. 37. l 1.

XI. Si diameter circuli includentis ejuſmodi figuram ſolidam, ſit Aα: fiatque Aα, M, Bι ∺: vel, quod idem eſt, per 9, 2BC+2DE+Fφ, M, AB ∺: Dico $\frac{\pi}{\delta}$Mq = ſuperficiei figuræ. Nam per 2, $\frac{\pi}{\delta}$ BC×AB = 2 ⌓ coni ABC: & per 4, $\frac{\pi}{\delta}$: BC+DE: in AB = 2 ⌓ fruſti BCED: & $\frac{\pi}{\delta}$:DE+Fφ: in AB = 2 ⌓ fruſtri DEφF. Ergo: 2BC + 2DE + Fφ: in AB = ⌓ figuræ totius, nempe $\frac{\pi}{\delta}$Mq. 23. 28 l 1.

XII. In Schem: 3. Figuræ ejuſmodi ſolidæ, ſi ſphæræ inſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$Mq minor eſt circulo habente axem ſphæræ continentis Aα pro diametro. Nam M ⊏ Aα.

Sit

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$Mq major eſt circulo habente axem ſphæræ contentæ 2IP $=$Bα pro diametro. Nam Aα, M, 2IP ∺ : Quare M cadet inter A & Q. 24, 29 l 1.

XIII. Quidni igitur ſphæræ ſuperficies æquetur quatuor maximis circulis; nempe $\frac{\pi}{\delta}$ Diam: q? 31 l 1.

XIV. Figura ejuſmodi ſolida æqualis eſt Cono, cujus Baſis eſt circulus æqualis ſuperficiei figuræ; & Altitudo IP perpend. è centro ſphæræ in latus figuræ: hoc eſt, per 11, $\frac{\pi}{3\delta}$Mq in (IP) $\frac{1}{4}$Bα $=$figuræ toti ſolidæ. Nam per 6, Rhomb: BACI$=\frac{1}{3}$ ○BAC in IP. Et per 8, Excavatum DBICE $=\frac{1}{3}$ ○DBCE in IP. Et per 7, Excavatum FDIEφ$=\frac{1}{3}$ ○FDEφ in IP. Et ſimiliter pro altero hæmiſphærio. Quare $\frac{1}{3}$○BAC+$\frac{1}{3}$○DECE+$\frac{1}{3}$ ○FDEφ in Bα (2IP) $=$ toti figuræ ſolidæ; nempe $\frac{\pi}{3\delta}$ Mq: vel$\frac{\pi}{3\delta}$Aα×Bα in $\frac{1}{2}$ B (IP). 25, 29 l 1.

XV. Figura ejuſmodi, ſi ſphæræ inſcribatur, minor eſt quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo: hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficie ſphæræ; altitudinem vero æqualem ſemiaxi. Sin circumſcribatur, iiſdem major eſt. Nam per 12, ſuperficies figuræ inſcriptæ, ſuperficie ſphæræ minor eſt: circumſcriptæ autem, major. 26. 29. l 1.

XVI.

XVI. Quidni igitur ipſa ſphæra æqualis ſit quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo; hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ; Altitudinem verò æqualem ſemiaxi? 32 l 1

Conſect. $\frac{2}{3}$ Cylind.$=$Sphæræ$=2$ Conis. Nã

$\frac{\pi}{3\delta}Rq \times 4R =$ Sphæræ. Et $\frac{\pi}{\delta}Rq \times 2R =$ Cylindro.

$\frac{\pi}{3\delta}Rq \times 2R =$ Cono.

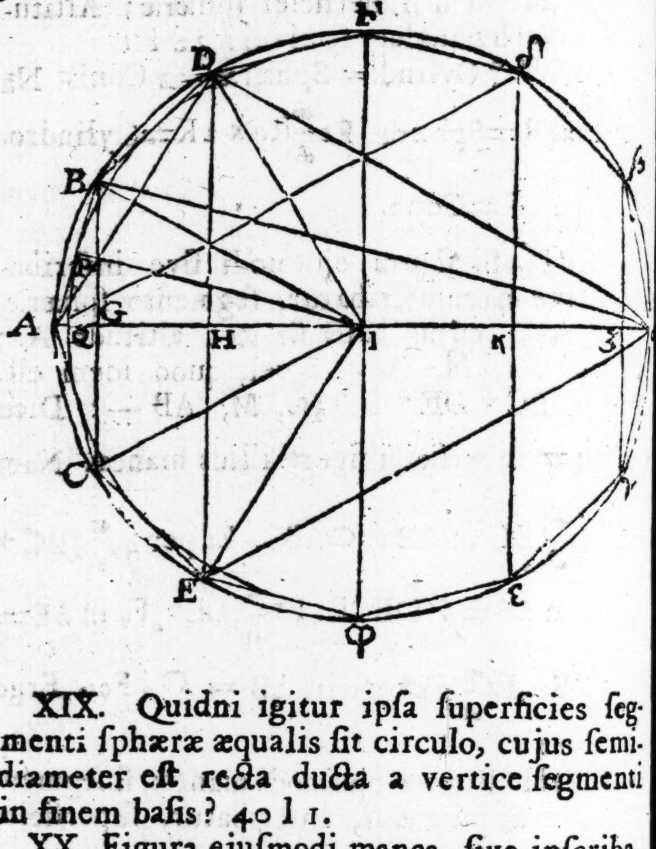
XVII. Si figura ejuſmodi ſive inſcribatur, ſive circumſcribatur, ſegmento ſphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, cujus baſis ſit $\delta\varepsilon$; altitudo $A\nu$; fiatque $B\alpha$, M, $A\nu$ ∺ : vel, quod idem eſt, per 9, $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, M, AB ∺ : Dico $\frac{\pi}{\delta}Mq =$ ſuperficiei figuræ illius mancæ. Nam per 2, $\frac{\pi}{\delta}\frac{1}{2}BC$ in $AB = \frown ABC$. Et per 4, $\frac{\pi}{\delta}\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}DE$ in $AB = \frown DBCE$: Et $\frac{\pi}{\delta}\frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}F\varphi$ in $AB = \frown FDE\varphi$. Et $\frac{\pi}{\delta}\frac{1}{2}F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$ in $AB = \frown \delta F\varphi\varepsilon$. Ergo 33. 37 l 1.

XVIII. Figuræ ejuſmodi mancæ, ſi ſegmento ſphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, inſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}Mq \sqsupset \frac{\pi}{\delta}A\delta q$. Nam $A\delta q = A\alpha \times A\nu \sqsubset B\alpha \times A\nu$.

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}Mq \sqsubset \frac{\pi}{\delta}A\delta q$. Nam $B\alpha = 2IQ$ eſt diameter ſphæræ interio-

ris

ris five contentæ. Estque $A n \sqsubset Q n$. Quare ½ M protenditur ultra IQ diametrum sphæræ 35. 38. 41 l 1.



XIX. Quidni igitur ipsa superficies segmenti sphæræ æqualis sit circulo, cujus semidiameter est recta ducta a vertice segmenti in finem basis? 40 l 1.

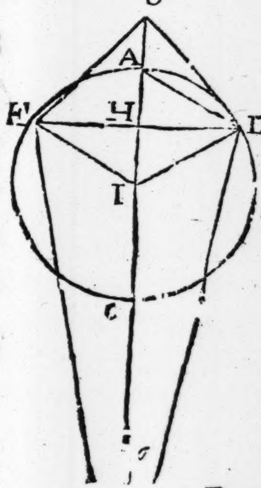
XX. Figura ejusmodi manca, sive inscribatur segmento sphæræ, puta DAE minori semicirculo, vel DαE majori, æqualis est Cono habenti basem æqualem superficiei illius figuræ mancæ; altitudinem verò æqualem perpend.

pend. IP e centro in latus figuræ, adjecto vel ablato Cono DIE medio; hoc est, toti solido DBACEI, vel reliquo DF$\delta\beta\alpha\gamma\epsilon\varphi$EI. Nam in solido minore DBACEI, per 6, Rhomb: BACI $= \frac{1}{3}$ ⌒BAC in IP. Et per 8, $\frac{1}{3}$ ⌒DBCE in Iφ $=$ excavato DBICE, Ergo. Et similiter de majore DF$\delta\beta\alpha\gamma\epsilon\varphi$ EI. 36, 39 l 1.

Consect. Quare & per 18, Si figura ejusmodi segmento sphæræ, puta DAE, vel DαE, inscribatur, totum solidum minus est Cono, cujus basis est circulus a semidiametro AD, vel αD; & altitudo semiaxis IA.

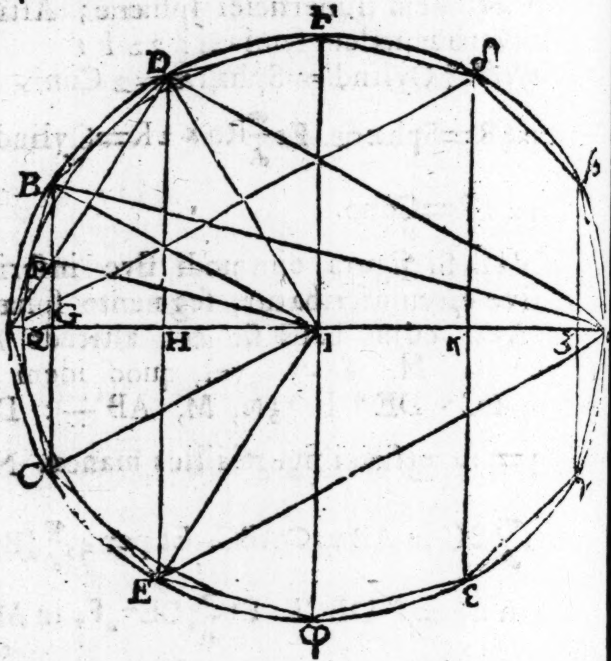
XXI. Quidni igitur Sector sphæræ DBACEI, æqualis sit Cono $\frac{\pi}{3\delta}$ADq in IA; & reliquus DαEI, æqualis Cono $\frac{\pi}{3\delta}$$\alpha$Dq in IA? 42 l 1.

XXII. Si fiat Hα. Hα. + Iα:: HA. HS: Dico $\frac{\pi}{3\delta}$DHq in HS $=$ segm: sphæræ DAE. Nam Hα. HA: : Hα + IA − Hα. HS − HA: : Iα. AS. Estque (Iα + AS) IS. IA: : (Hα + HA) Aα. Hα : : Aαq. αDq:: ADq. DHq. Quare $\frac{\pi}{3\delta}$DHq × IS $=$ $\frac{\pi}{3\delta}$ADq × IA $=$ segmento DAE + (Cono DIE) $\frac{\pi}{3\delta}$ DHq × IH.



Ergo

ris five contentæ. Estque $A\eta \sqsubset Q\eta$. Quare $\frac{1}{2}$ M protenditur ultra IQ diametrum sphæræ 35. 38. 41 l 1.



XIX. Quidni igitur ipsa superficies segmenti sphæræ æqualis sit circulo, cujus semidiameter est recta ducta a vertice segmenti in finem basis? 40 l 1.

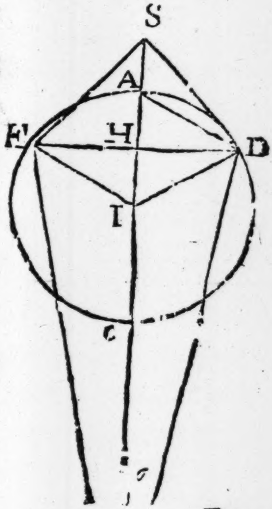
XX. Figura ejusmodi manca, sive inscribatur segmento sphæræ, puta DAE minori semicirculo, vel DαE majori, æqualis est Cono habenti basem æqualem superficiei illius figuræ mancæ; altitudinem verò æqualem perpend.

pend. IP e centro in latus figuræ, adjecto vel ablato Cono DIE medio; hoc eſt, toti ſolido DBACEI, vel reliquo DF$\delta\beta\alpha\gamma\epsilon\varphi$EI. Nam in ſolido minore DBACEI, per 6, Rhomb: BACI $= \frac{1}{3}$ ⌒BAC in IP. Et per 8, $\frac{1}{3}$ ⌒DBCE in Iφ = excavato DBICE, Ergo. Et ſimiliter de majore DF$\delta\beta\alpha\gamma\epsilon\varphi$ EI. 36, 39 l 1.

Conſect. Quare & per 18, Si figura ejuſmodi ſegmento ſphæræ, puta DAE, vel DαE, inſcribatur, totum ſolidum minus eſt Cono, cujus baſis eſt circulus a ſemidiametro AD, vel αD; & altitudo ſemiaxis IA.

XXI. Quidni igitur Sector ſphæræ DBACEI, æqualis ſit Cono $\frac{\pi}{3\delta}$ADq in IA; & reliquus DαEI, æqualis Cono $\frac{\pi}{3\delta}$$\alpha$Dq in IA? 42 l 1.

XXII. Si fiat Hα.Hα. + Iα:: HA. HS: Dico $\frac{\pi}{3\delta}$DHq in HS = ſegm: ſphæræ DAE. Nam Hα. HA:: Hα + IA − Hα. HS − HA:: Iα. AS. Eſtque (Iα + AS) IS. IA:: (Hα + HA)Aα. Hα:: Aαq. αDq:: ADq. DHq. Quare $\frac{\pi}{3\delta}$DHq × IS = $\frac{\pi}{3\delta}$ADq × IA = ſegmento DAE + (Cono DIE) $\frac{\pi}{3\delta}$ DHq × IH.



Ergo

Ergo $\frac{\pi}{3\delta}DHq \times HS\,(IS - IH) =$ ſegmento DAE.

Conſectarium. Quia $\frac{HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha} = HS$: Erit

$$\frac{\pi}{3\delta}\,\frac{DHq \times HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha} = \text{ſegmento } DAE.$$

Quare $H\alpha . H\alpha + I\alpha :: \frac{\pi}{3\delta}DHq \times HA.$ ſegm: DAE

212.

FINIS.

HOROLOGIORUM
SCIOTERICORUM
IN PLANO,

Geometrice ſolum, ſine Calculo Trigonometrico, delineandorum,

MODUS FACILLIMUS.

PER QUEM

Meridiana, Subſtylaris, & Stylus ipſe, non inveſtigantur modo, ſed etiam, in cujuſvis generis Plano, ſitu proprio inſcribuntur, omniaque perſpicue demonſtrantur.

Inventore

GUILELMO OUGHTREDO

23um Ætatis Annum agente.

OXONIÆ,

Excudebat *LEON. LICHFIELD.*

Anno Dom. M DC XC III.

Pronâ facie nutat, & vocatur *Inclinans*; vel Declivi & ſupinâ ſuperficie reſidit, & vocatur *Reclinans*.

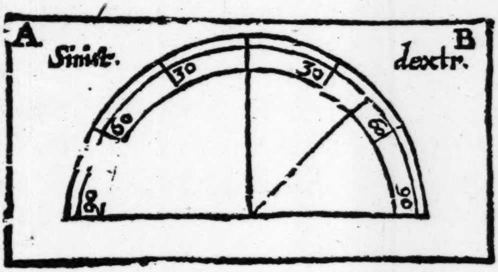
Inclinationis iſta & Reclinationis Obliquitas, per arcum alicujus Azumith (ſive Circuli Verticalis) inter Loci Verticem & Planum intercepti menſuratur, quod quidem Azumith Plano Perpendiculare eſt, & Quadrantis ope, in 90 Gr. diviſi, facillimè invenitur.

Reſpectu Meridiani; Planum eſt vel Directum; vel Declinans. Planum Directum eſt, quod Punctum aliquod è quatuor Cardinalibus directè reſpicit: Eſtque, vel Meridiano Perpendiculare, qualia ſunt plana Meridionalia & Borealia: vel Parallelum, qualia ſunt Orientalia & Occidentalia. Planum Declinans eſt, quod non directè Puncto alicui Cardinali opponitur; ſed à Meridie aut Septentrione, verſus Orientem aut Occidentem, declinat.

Declinatio plani eſt Arcus Horizontis, inter Sectionem plani horizontalem, & punctum Orientis vel Occidentis, interceptus; Vel, eſt Arcus Horizontis, qui inter Meridianum & Polum Sectionis Horizontalis intercipitur.

Inveſtigatio Declinationis Plani cujuſque aut Muri difficilior aliquantum. Tutiſſimam viam arbitror (quoniam Acus Magnetica facilè diſtrahitur) eſſe per Tabulam Rectangulam, uncias fere duodecim longam, latam 6; Cui Semicirculus à medio utrinque in 90 gra-

gradus divisus inscribitur, stylúsque à Centro erigitur, ut in Schemate subjecto videre est.



Usus hujus Instrumenti talis est. Quolibet die (datâ priùs Declinatione Solis) ante decimam Horam AM (i. e. ante Meridiem) vel post secundam PM (i. e. post Meridiem) applicetur Muro Latus Instrumenti AB, ita ut Horizonti maneat Parallelum, & quem Gradum Styli umbra vel in Dextro vel Sinistro Quadrante notet observes, quam idcirco [*Umb. Dextr.*] vel [*Umb. Sinistr.*] voco: Deinde quàm citissimè Solis Altitudinem inquiras. Jàmque Solis, tam à Polo Boreali, quàm à Vertice, Distantiam, simulque Altitudinis Poli Complementum, adeptus; quære (aut ex Analemmate, aut Projectione Horizontali, vel tandem Trigonometricè) Azimuthalem Solis à Meridie distantiam. Denique, cum Tempore Diei, Solis Azumith, Stylíque Umbrâ, Tabellam sequentem pete; &, facto quod ibi faciendum præcipitur, verum Muri situm habebis.

AM

AM. Azum. - Umb. Sin.	A Meridie in Ortum.
AM. Azum.+Umb.Dext.	
PM. Umb. Dext.- Azum.	
AM. Umb. Sin - Azum.	A Meridie in Occasum.
PM. Azum. + Umb. Sin.	
PM. Azum.- Umb. Dext.	
AM. Azum.+Umb.Dex.ex 180	A Septentrione in Ortum.
PM. Azum.+Umb.Sin.mi. 180	
PM. Azum.+ Umb. Sin.ex 180	A Septentrione in Occas.
AM. Azum.+Umb.Dex.mi.180	
AM. Azum. - Umb. Sin. = 90	In Ortu.
AM. Azum. +Umb. Dex. = 90	
PM. Azum. + Umb. Sin. = 90	In Occasu.
PM. Azum. - Umb. Dex. = 90	
Azum. - Umbra = 0.	In Merid.
Azum.+ Umbra = 180.	In Septent.

Exempli gratia. Julii 15 post Meridiem, inveni Umbram in Gradu 30 Dextri Quadrantis; Solem vero altum 23 grad: & gradum ferè 20^{um} Declinationis Borealis attingentem; unde Azumith erat, gr: 91 ½. At in Tabula [PM. Azum.-Umb. Dex.] est à Meridie in Occasum: quocirca 91 ½ - 30, i. e. 61 ½ est Declinatio Muri Meridionalis in Occasum vergentis.

Rursus; Eodem Julii 15° post Meridiem, inveni Umbram in 57 Gr. Sinistri Quadrantis; & Altitud. Solis 22 $\frac{1}{10}$: Unde Azumith erat graduum 93. At[PM Azum: +Umb. Sin: ex 180] est à Septentrione in Occasum. Ergo 93 + 57 ex 180, id est, 30 gr. est Muri Borealis

realis in Occaſum vergentis Declinatio.

Prout Horizontem, Meridianumve, reſpicit murus aut Planum, ita Nomen ſuum quod in eo deſcribitur Horologium ſortitur; veluti, ſi Planum Reclinans, Declinet etiam à Meridie in Ortum, ejuſdem Horologium dicitur Meridionale Reclinans Declinans in Ortum.

CAP. II.

Linearum, quæ in deſcribendis Sciotericis præcipue uſui ſunt, Declaratio.

1. LIneæ Horariæ, ſunt interſectiones Circulorum Horariorū cum Plano Scioterici.

2. E Lineis Horariis, Principalis eſt Meridiana, ſeu Linea horæ duodecimæ, quæ eſt ipſa interſectio à plano Meridiani loci cum plano Scioterci facta. Et, ab hac, Linearum Horar. diviſio principium ducit.

3. Circulorum Horariorum plana omnia in planum Æquinoctiale perpendiculariter cadunt, dividuntque æqualiter in 24 partes, per lineas rectas quæ ſunt Lineæ Horarum in Æquinoctiali; at cætera plana omnia dividunt inæqualiter. Circulorum autem Horariorum communis Interſectio in Polis eſt & Axe Mundi ſive Æquinoctialis.

4. Horologii Stylus (lineam illam intelligo à qua Umbra projicitur) Axis Mundi ſegmentum eſſe ſupponitur; ideòque ita ſemper locandus eſt, ut extremitatibus ſuis exactè Mundi Polos reſpiciat, extremitate ſc. ſuperiori

riori polum apparentem & inferiori occultum.

5. Quare, si planum intersecet mundi Axin, Sciotericum in eo descriptum Centrum habebit, è quo Lineæ omnes Horariæ ducuntur: At si Planum Axi Parallelum sit, non habebit Centrũ sed Lineæ omnes Horariæ erunt tum Stylo tum sibi invicem parallelæ.

6. Substylaris est Linea Plani Stylo proxima, cui Stylus perpendiculariter imminet; est enim Meridianus Loci illius in Terra, cui Planum est Horizontale; in Ortum à subjecto Loco elongati, si substilaris inter Horas Matutinas cadat; at in Occasum, si inter Pomeridianas: Differentia Longitudinum, est Arcus Æquinoctialis inter Substilarem & Meridianum Æquinoctialis interceptus.

7. Elevatio Poli supra Planum Scioterici, est Angulus quem Stylus constituit cum Substylari.

8. Est alia insuper Linea insignioris usus, intersectio scilicet Plani Æquinoctialis cum Plano Horologii; vulgò *Linea Contingens*, quoniam in eâ solâ Lineæ Horariæ Scioterici, Lineæque Horariæ Æquinoctialis sese mutuò intersecant; Et, quoniam Centrum Æquinoctialis in ipso Axi est, ejusmodi Linea Substylarem ad rectos angulos secat.

9. In Planis omnibus Australibus, Polus Australis elevatur; in Borealibus, Borealis: duobus tantum Casibus exceptis, ut suo Loco dicetur, in quibus Polus oppositus elevatur; ideoque Substylaris & Stylus inventus trans Centrum

trum in oppositam partem protrahendus erit.

10. Scioterici Delineatio tribus distinctis Operationibus perficitur; hoc Ordine: Prima est, Meridianam, Substylarem, & Stylum, debitis Locis inscribere. Secunda est, Lineam Contingentem ducere; & Æquinoctialem, cum Meridiana, Lineísque ejus Horariis, ad Contingentem usque protrahere. Tertia est ipsas Scioterici Lineas Horarias describere, & Numeris propriis notare.

11. Eadem Meridianæ, Substylaris, & Styli Inscriptio duobus aliquando diversi Generis Sciotericis inservit: scilicet, vel Chartam cui inscribuntur sursum vorsum invertendo, ut in directè Septentrionalibus aut Australibus; vel faciem aversam ejus ostendendo ut in Orientalibus aut Occidentalibus Erectis. Aliquando etiã quatuor Generibus inservit; tam Anteriorem quam Aversã faciem Invertendo.

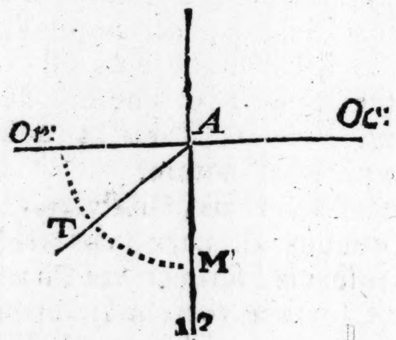
CAP. III.

De Scioterico Horizontali.

1. IN Plano Horizontali, Meridianus, seu Linea Duodecimæ, à Septentrione in Meridiem exactè ducitur; ideoque Meridiano Loci subest: Eadem quoque Substylaris est: & Angulus Styli supra eam inclinati, æqualis est Elevationi Polari, seu Latitudini, Loci.

2. Ut delineetur igitur, Duc in Plano Lineam Ortum & Occasum directè indicantem. hanc in Puncto A, circa medium, secet perpen-

dicularis AM: quæ ſimul & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Centrum erit Scioterici; & Linea Prima *Or. Oc.* Hora 6ta.



Pedem circini in puncto A fige, & altero pede ad quodvis Meridianæ latus Quadrantem deſcribe; in quo, à Meridianâ incipiens, arcum MT Altitudini Polari æqualem numera; &, per terminum ejuſdem, è Centro A, Lineam AT producito, quæ Stylum dabit.

CAP. IV.

De omnimodis Sciotericis directè Septentrionalibus, aut Auſtralibus; ſive Erecta ſint, ſive Obliqua.

1. IN Planis omnibus directe Septentrionalibus aut Auſtralibus, tam erectis quam obliquis, Meridiana in Lineam Horizonti parallelam perpendiculariter cadit; Eadémque Subſtylaris eſt.

2. Si

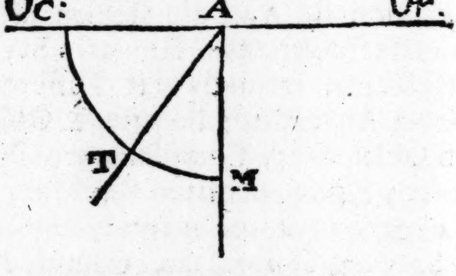
2. Si Planum Erectum sit, Elevatio Styli supra Substylarem, æqualis est Complemento Elevationis Polaris.

3. Si Planum sit Australe Inclinans, vel Septentrionale Reclinans; Elevatio Styli supra Substylarem, æqualis est Complemento Altitudinis Polaris, & Obliquitati, simul sumptis. At si Obliquitas Altitudine Polari major sit, tum Angulus Elevationis Styli erit Recto majór: Si verò æqualis fuerit, Planum æquinoctiali Parallelum est; Stylus ergo è Centro A ad rectos angulos erigendus est.

4. Si Planum sit Australe Reclinans, vel Septentrionale Inclinans; Elevatio Styli supra Substylarem, æqualis est Differentiæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis. At si Obliquitas, Complemento Polari, major fuerit; Polus oppositus elevatur, (qui unus est è casibus antea memoratis *Cap.* 2. *Sect.* 9.) Si verò Obliquitas, Complemento Polari, æqualis fuerit; Planum Axi parallelum est: ideoque Scioterícon in eo descriptum Centro carebit; uti dictum est *Cap.* 2. *Sect.* 5.

5. Ad delineandum igitur quodvis hujus generis Sciotericon, ducatur primùm in Plano Linea Horizonti parallela (quæ simul in Ortum & Occasum dirigitur:) Hæc circa medium in Puncto A secetur à Perpendiculari AM, quæ & Meridiana & Substylaris erit; Punctum autem A Scioterici Centrum erit, (si saltem Centrale fuerit,) & linea illa prima *Or.Oc.*Hora VI^ta^ modò omnino reperiatur. Pe-

de circini in puncto A fixo, ad quodvis Meridianæ latus, pede altero Quadrantem describe, (infra lineam *Or. Oc.* in Australibus Planis, supra verò in Septentrionalibus;) & in hoc Quadrante, à Meridiana, numera arcum MT, æqualem Elevationi Styli supra Subſtylarem, (per 2^am^, 3^am^, 4^am^ Sectionem inventæ;) Et e Centro A, per Terminum ejusdem, duc Lineam AT Styli futuri; ut in Schemate præcedenti transpositis solum Literis *Or. Oc.*

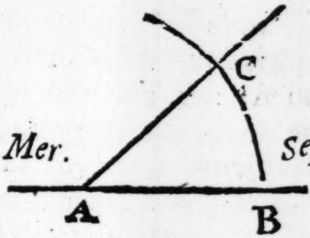


CAP. V.

De Sciotericis, Directè Orientalibus & Occidentalibus, Erectis.

IN directè Orientalibus & Occidentalibus Erectis; nec Centrum est nec Meridiana, cùm Planum hujusmodi plano Meridiani parallelum sit: Sed Substylaris in lineam Horizonti parallelam, ad angulum Altitudini Polari æqualem, insistit, Septentrionem superne indicantem: Stylus autem ei parallelus imminet.

AdSciotericum igitur hujusmodi delineandum, ducatur in Plano lineaHorizonti parallela, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Et Centro A,



prope Meridionalem extremitatem electo, Quadrantem versus Borealem describe; In quo arcum BC Altitudini Polari æqualem designans, Lineam AC Substylarem extende.

CAP. VI.

InPlanis, directè Orientalibus &Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. PRimo, Ducatur in plano Meridiani, linea Horizonti parallela AB, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Hæc circa medium secetur à perpendiculari AC: Punctúmque A Centrum erit. Pedum altero circini ad punctum A fixo, altero ad Lineam AC Diametri extenso, Quadrantem describe, (infra Lineam primam, AB, versus Meridiem, si Planum inclinet; suprâ verò ad Boream, si reclinet:) Et, à Diametro AC incipiens, numera in Quadrante congruo tam Obliquitatem, quàm Altitudinis Polaris Complementum; Et, per Arcuum extremitates, è Centro A, Binæ producantur lineæ; quarum una vocetur, Linea *Obliquitatis;* altera, Linea *Polaris.*

 De-

Deinde in linea prima AB, è regione Quadrantis congrui, abſcindatur idoneum ſegmentum AB: &, per punctum B, duc lineam Diametro parallelam, lineam Polarem in P intercipientem. Quarta denique lineâ ipſi AB parallelâ, Lineámque Obliquitatis in O ſecante, claudatur Parallelogrâmmum ABPC.

Deinde, ponatur AK=AO=BL, verſus CP; & ducatur linea Horizontalis KL.

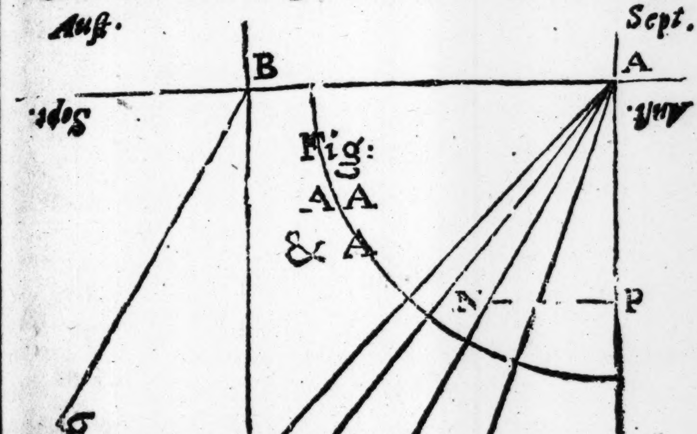
Poſtremò, ſuper Lineam Obliquitatis AO, menſuretur AN=CO, & ducatur NR ipſi AB parallela, deinde ſuper LB verſus B, ponatur LS=NR. Producatur AS pro ſubſtylari; in quâ, à Puncto, S, erigatur ad rectos angulos ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Subſtylari ad Angulum SAT inſiſtens.

Exemplum Scioterici in Plano Directo Orientali, Inclinante grad. 30. *Vide in Figura* A.

Demonſtratio. Protrahe Lineas AC & BP ad uſq; κ & λ, addendo illis Longitudinem ipſius CO. Conſtitue dein Triang. Rectang. BPλ=ACO: Et, Plano in Lineis Bλ. Pλ. diſſecto, plicentur Lineæ CP & BP ad rectos angulos, (Retrorſum quidem pro Inclinantibus, Antrorſum pro Reclinantibus Planis,) adeo ut punctum λ in Triangulo, & alterum λ in linea Pλ coincidant: adeoque Plana ACBP, & BP λ in planum Horizontale PC κλ ad Rectos Angulos inſiſtent. Atque, in hoc ſitu, quatuor cogitanda ſunt Plana; Planum ſc. Horizontale PCκλ, Planum Erectum ACPB (quod Meridiani planum eſt,) & Planum Obliquum

Orientale Directum Inclinans gr. 30.

Si linea κλ & triangulum BPλ desint, erit Fig. A.



liquum AB$\lambda\kappa$=ABLK Plano Delineationis, quoniam Bλ=BL. Jam, si a Puncto P ducatur Linea Pσ, perpendicularis Hypotenusæ Bλ Rectang. Triang. BPλ: patet, quòd linea imaginaria Aσ, Substylaris erit Plani Obliqui; &, quòd illi respondeat AS, in Plano Delineationis: quódque Altitudo Styli, in Puncto σ, sit Pσ=AR=ST. Nam Triang. Rectang. P$\sigma\lambda$=ANR, quoniam Hypotenusa Pλ=AN; & Angulus BλP=ANR, est Complementum Obliquitatis. *Demonstrationi inservit Figura* AA.

CAP. VII.

In Planis Australibus aut Septentrionalibus Erectis, Declinantibus in Ortum aut Occasum, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DUcatur primò Linea Horizonti Parallela AB. Distinguantur etiam extremitates ejusdem seu Plagæ ad Ortum & Occasum. Secetur autem in Puncto A, circa medium, à Perpendiculari AC, quæ Meridiana erit; Punctum A verò Centrum Scioterici.

Circini pedum altero in Centro A fixo, & altero ad AC tanquam Diametrum extenso, semicirculum à plagâ Declinationi contrariâ describe. In cujus quadrante (inferiori, si Meridionale sit Planum; superiori verò, si Septentrionale,) tam Declinationem, quam Complementum Elevationis Polaris, ab AC Diametro incipiens, numera: &, per arcuum duorum extremitates, binæ è Centro lineæ producantur, quarum una vocetur Linea *Declinationis*, altera *Polaris*. Deinde in Linea prima AB,

versus Semicirculum, segmentum abscinde congruum AB: & à Puncto B producatur linea Diametro parallela, lineam Polarem in P secans: quartâ deniq; lineâPC, ipsi AB parallelâ, claudatur Parallelogrammum AB PC. Jam, super Lineam Declinationis, aptetur AD=AB; pérque D, ducatur etiam FDE Diametro Parallela, Lineam AB in F, PC in E, secans.

Postremò, pro Substylari producatur AE. Super punctum verò E, ad rectos angulos, erigatur ET=DF; &, pro Stylo, ducatur AT, Substylari ad Angulum EAT insistens.

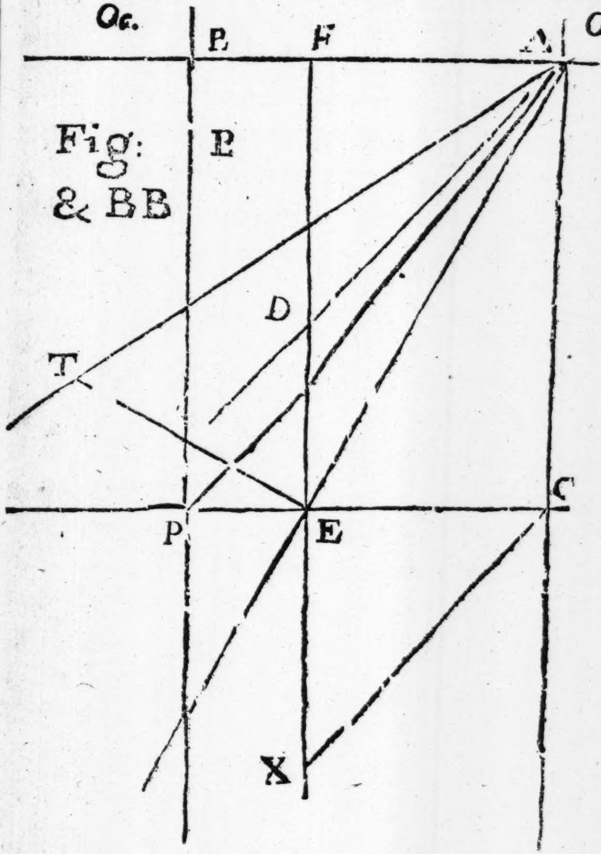
Exemplum Scioterici in Plano Australi erecto, Declinante in Ortum gr. 42.30'. *Vide in Figura* B.

2. Demonstratio. Si parallelogrammo ACEF adjiciatur Triangulum CEX=AFD, tanquam in Plano Horizontali in quod Parallelogrammum ACEF ad Rectos Angulos insistere supponitur,(plicato nempe in Linea CP Plano,) perspicuè patet Rectangulum Triangulum ACX=ACP esse Gnomonem seu Stylum Horizontalem, Lineam vero CX Meridianam Plani Horizontalis, Stylumque AX Mundi Axin, & Rectangulum Triangulum AET=AEX Gnomon erecti Plani. *Demonstrationi inservit Figura.* BB.

3. Notandum est, quod in Planis omnibus Declinantibus, quamvis etiam obliqua sint, semper incipiendum erit ab ejusmodi Figurâ, AFDECX (uti jam præceptum est,) secundùm Declinationem, Muri Planive dati, delineatâ; cui addenda est etiam DG ipsi AF Parallela, erit ergo AG=XF. Quod semel monitum sufficiat.

CAP.

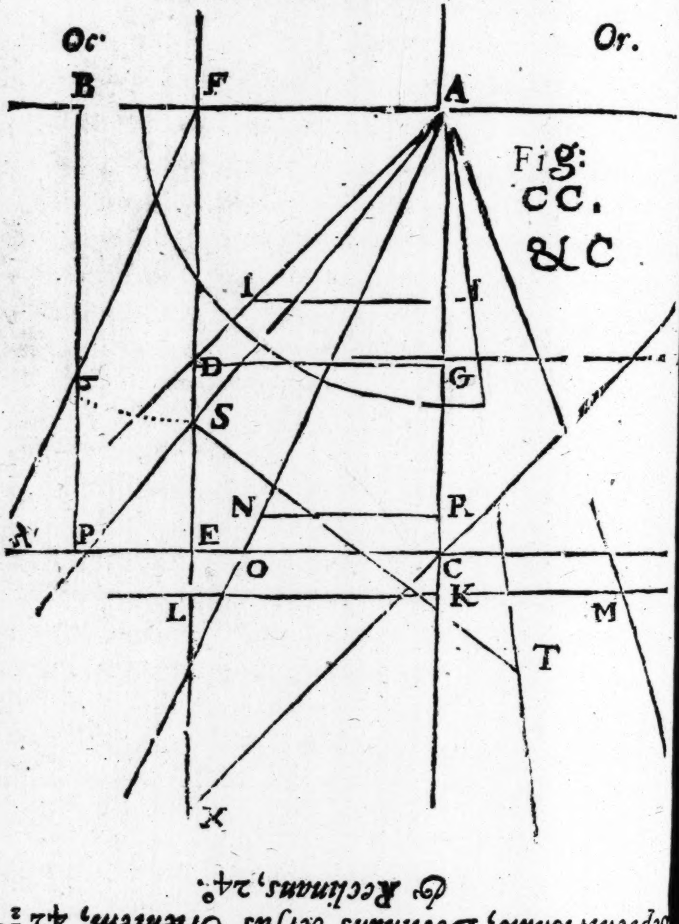
Meridionale erectum, Declinans versus Orientem.



Si omittatur linea CX, erit Figura B.

Spetentrionale erectū, Declinans versus Orientem.

Meridionale, Declinans versus Orientem gr. 42 ½. & Inclinans gr. 24.



Septentrionale, Declinans versus Orientem, 42 ½°. & Reclinans, 24°.

CAP. VIII.

In Planis Australibus Declinantibus & Inclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DElineetur (ut prius *Cap. VII. Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX, ad datam Declinationem. Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in Semicirculo numera; ductâque Obliquitatis Lineâ AO, ponatur AK=AO=FL versus CE; & producatur Linea Horizontalis LK.

Sumatur AH=CO; ductâque HI ipsi AB parallela, abscindatur à Linea Horizontali KM=HI ad alterum Diametri latus: & pro Meridiano ducatur AM.

Postremò, Super Lineam Obliquitatis AO mensuretur AN=AG+AH: & ducatur NR ipsi AB parallela: tum, super Lineam LF versus F, ponatur LS=NR, & protrahatur pro Substylari AS: à Puncto autem S, ad rectos Angulos, erigatur ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Substylari ad angulum SAT insistens.

Exemplum Scioterici in Plano Australi, Declinante in Ortum 42°, 30'; *& Inclinante* 24°, 0'. *Vide in Figura* C.

CAP.

CAP. IX.

In Planis Meridionalibus Declinantibus & Reclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Inclinantibus, Meridianam, Substylarem & Stylum inscribere.

1. DElineetur ad Datam Declinationem (uti prius *Cap.* 7. *Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX.

Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in semicirculo numera; &, ductâ Lineâ Obliquitatis AO, ponatur AK=AO=FL, versus CE; & ducatur Linea Horizontalis KL.

Deinde mensuretur AH=CO: &, ductâ HI ipsi AB parallelâ, sumatur in Linea Horizontali KM=HI & ad idem Diametri Latus; & ducatur, pro Meridiana, AM.

Postremò, in Obliquitatis Lineâ AO ponatur AN=GH differentiæ sc. inter AG & AH: & ducatur NR, Lineæ AB Parallela.

Tum, si AG⊏AH (hoc est, EX⊏CO) super lineam LX versus X ponatur LS=NR. At si AG⊐AH (hoc est, EX⊐CO) super Lineam LF versus F ponatur LS=NR. producatur pro Substylari AS; super quam, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST=AR, & producatur Linea Stylaris AT, Substylari ad Angulum SAT insistens. Et in hoc Casu secundo, quum AG⊐AH, Polus oppositus elevatur, (qui è Casibus duobus alter est *Cap.* 2. *Sect.* 9. memoratis.) Etsi AG=AH, hoc est EX=CO, Planum Axi Parallelum est; & quod

in

in eo deſcribitur Sçiotericum Centro carebit (ut *Cap.* 2. *Sect.* 5. monſtratum erat:) &, in iſto Caſu, AM Subſtylaris erit, non autem Linea Duodecimæ.

EXEMPLUM I.

Meridionale, Declinans verſus Orientem gr. 42½ *& Reclinans gr.*18. *pro Latitudine gr.* 51.30′.

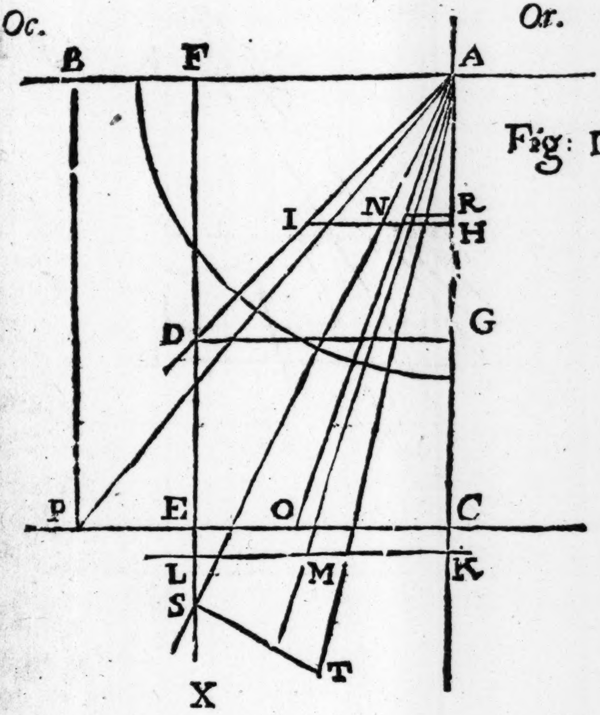
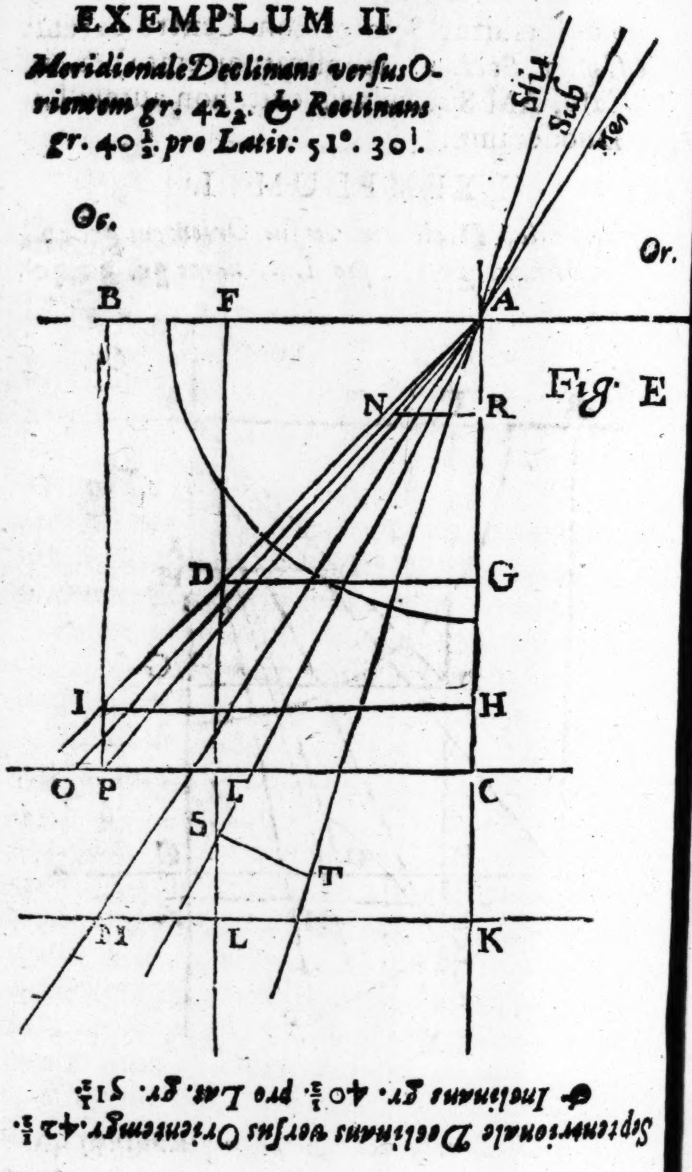


Fig: D

Septentrionale, Declinans verſus Orientem, gr. 42½ *& Inclinantibus gr.* 18. *pro Lat. gr.* 51. 30′.

EXEMPLUM II.

Meridionale Declinans versus Orientem gr. 42½. & Reclinans gr. 40½. pro Latit: 51°. 30'.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr. 42½. & Inclinans gr. 40½. pro Lat. gr. 51½.

EXEMPLUM III.

Meridionale Declinans versus Orientem gr. 42 $\frac{1}{2}$.
& Reclinans gr. 30$\frac{1}{2}$. pro Latit: 51°. 30'.

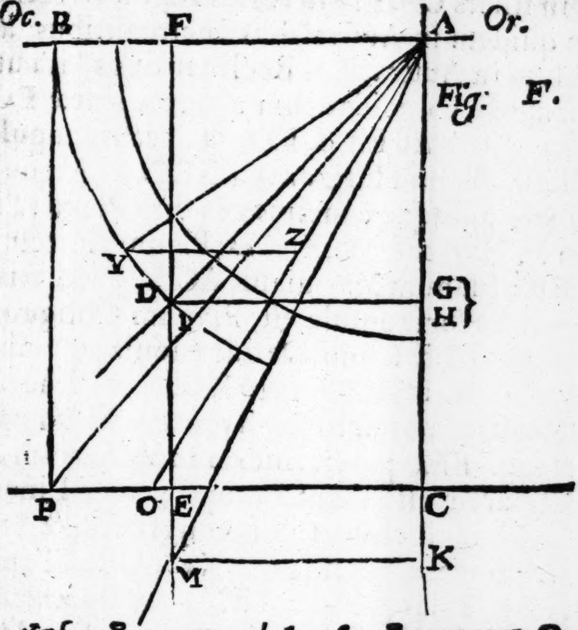


Fig: F.

Septentrionale Declinans versus Orientem gr. 42 $\frac{1}{2}$.
& Inclinans gr. 30° $\frac{1}{2}$. pro Latit: gr. 51$\frac{1}{2}$.

2. Demonstratio operis in Capitibus VIII & IX. Si Sciotericon Australe fuerit Declinans simul & Inclinans ;adauge Planum CEX, Papyrum adglutinando lineæ CE, (at ponè Planum ACEP ;) in qua sub lineis CA & EF ponantur distantiæ Cκ & Eλ=CO ; & per puncta κ λ ducatur linea interminata.

Si verò Australe fuerit Declinans simul & Reclinans, protrahe lineas AC & FE versus X, ad κ usque & λ, addendo illis ipsam CO ; & per puncta κ λ ducatur linea interminata.

De-

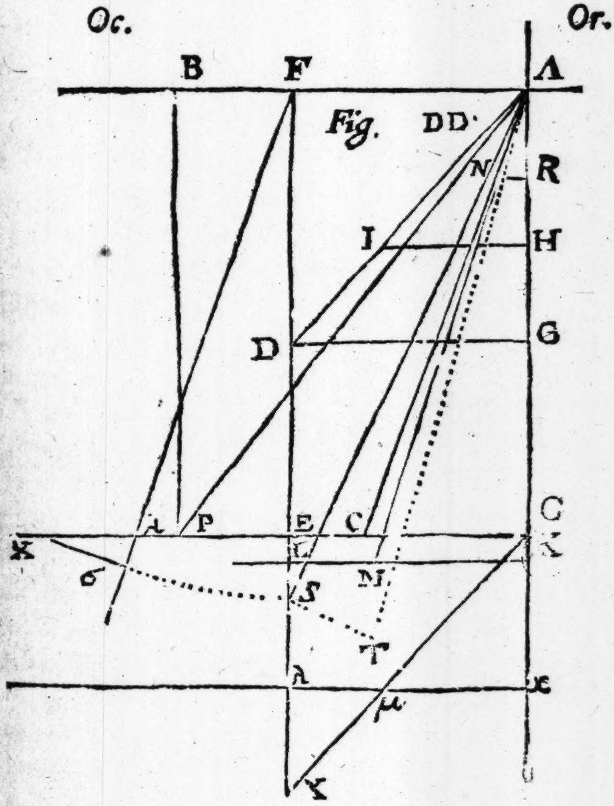
Deinde, ponatur Triang. Rectang. FEλ=ACO; &, dissectâ Chartâ in lineis Eλ, Pλ, plicetur in lineis CE, FE, ad rectos angulos: (retrorsum quidem in Australibus Inclinantibus, antrorsum in Australibus Reclinantibus,) ita ut λ Trianguli, coincidat cum altero λ lineæ EλX. Plana igitur ACEF & FEλ, ad rectos angulos insistent Plano Horizontali XECκλ. Atque in hoc Situ quinque concipienda sunt Plana; Planum sc. Horizontale, XECκλ; Planum Erectum, ACEF; Planum Meridiani, ACX; quod etiam Gnomon Horizontale est, Planum Obliquum, AFλκ=AFLK Plano Delineationis, quoniam FL=Fλ. Tum, si à puncto X ducatur linea Xσ perpendicularis ipsi Fλ hypotenusæ Triang. Rectang. FEλ; patet, lineam imaginarium Aσ Substylarem esse Plani Obliqui; eique Lineam AS in Plano Delineationis congruere; & Styli Elevationem à puncto σ esse Xσ=AR=ST; nam Rectang. Triang. Xσλ=ARN, quia Hypotenusa Xλ=(AG±AH) AN, & Angulus FλE=ANR Complemento Obliquitatis. Patet etiam, quod in *Casu* 2do, *Capitis* 9ni, ubi AG⊐AH, hoc est, EX⊐Eλ, Polus oppositus elevetur.

Postremò, Si Meridianus Horizontalis CX producatur donec Lineæ λκ in puncto μ occurrat; Linea κμ æqualis erit & parallela ipsi KM =HI; nam Rect. Triang. Cκμ=AHI, quoniam Cκ=CO=AH, & Ang. κCμ=EXC=HAI.

Demonstrationi inserviunt Figuræ Literis duplicibus notatæ CC. DD. EE. FF. *Figuris*, C,D,E,F, *congruentes.*

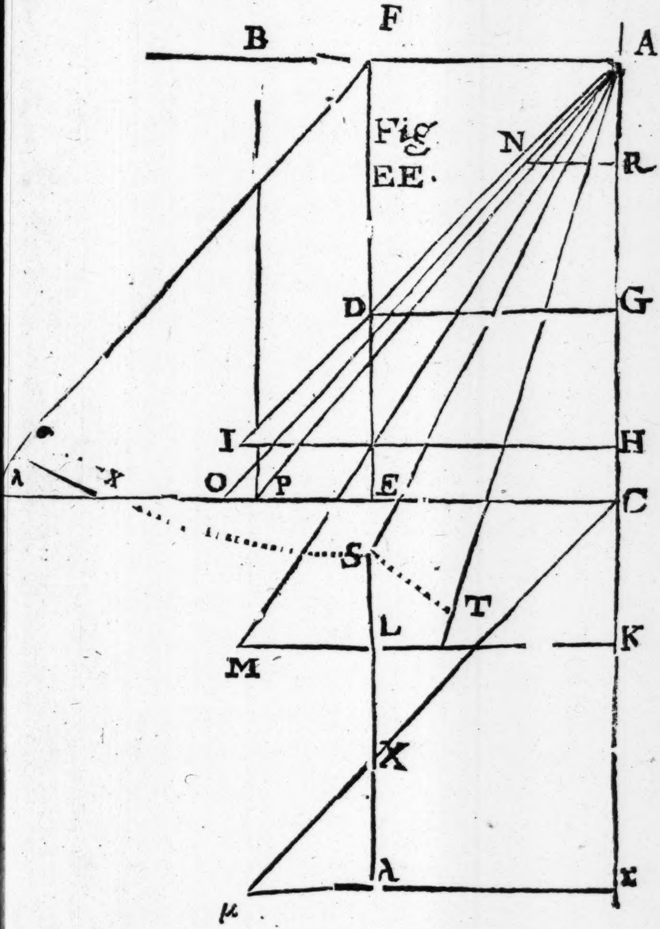
Me-

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans : In quo AG⊏AH, *hoc est*, EX⊏(CO=)Eλ.



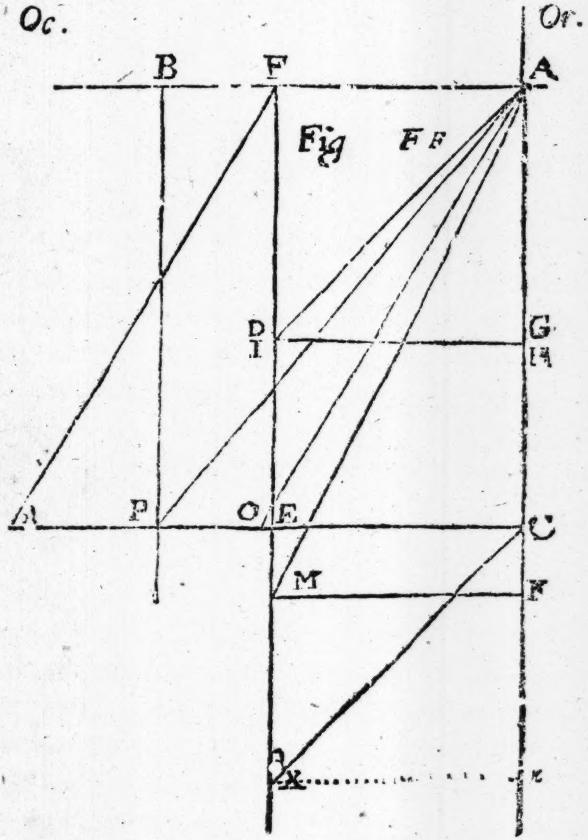
Septentrionale Declinans versus Orientem, & Inclinans.

[Me]ridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans: In quo AG $\sqsupset$ AH. Hoc est EX $\sqsupset$ (CO =) Eλ.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinan[s]

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans: In quo G *&* H *sunt idem punctum: Hoc est,* X *&* λ: *Vel* CO=EX.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

1

A
ir
p
ac
ta
te
t
n
Sc
A

fc
pu
ta
m
A
li
qu
fe
di
ft
n

CAP. X.

Lineam Contingentem, & Æquinoctialem, cum Meridiana cæterisque Lineis ejus Horariis, ducere.

1. PEr Regulas præcedentes (secundum Plani situm) debite inscriptis, Meridiana AM, Substylari AS, & Stylo AT; accipiatur in Substylari (ubi magis appositum videbitur) punctum quodlibet Q, è quo linea longissima ad rectos angulos extendatur; cujus extremitas ad Ortum literis *Or*, ad Occasum *Oc*, notetur. Hæc Linea *Or.* Q. *Oc.* vulgò *Linea Contingens* dicitur; & reverà est Unica Communis Intersectio plani Æquinoctialis, & plani Scioterici. Ubi hæc linea secat Meridianam AM, affige Literam N.

2. Centrum Æquinoctialis Æ, (e quo describendus est in Sciotericis Centralibus,) punctum est in Substylari, quod à puncto Q tantum distat, quantum ipsum Q, à vicinissimo Styli Puncto, Circino distare inveneris. At si non fuerit Centrale Sciotericum: quodlibet Substylaris punctum pro Centro Æquinoctialis assignare licet; hâc tantum observatâ Regulâ, quod quantum à Contingente distat Centrum Æquinoctialis, tantum à Substylari Stylum distare & parallelus eminere necesse est.

3. Hoc itaque modo investigato Æquinoctialis Centro Æ, describatur ex eo (quolibet autem Intervallo,) *Contingentem* versus, Semicirculus Æquinoctialis; hoc est, ab utroque Substylaris Latere Quadrans. Deinde, Punctis Æ, N, admotâ Regulâ, ducatur Linea ÆN, Circulum Æquinoctialis secans in m. Linea autem Æm Meridiana Æquinoctialis erit; à quâ sumitur initium Æquinoctialis utrinque dividendi in Horas, per Arcum 15 Graduum, vel in Semihoras per dimidiatos ejusmodi Arcus. Per divisiones verò singulas, è Centro Æ, obscuræ producendæ sunt lineæ ad Contingentem terminatæ: Quæ lineæ Horariæ Æquinoctialis erunt.

4. Inde hæc oriuntur Consectaria. Primo, quòd in omnibus Sciotericis, quibus eadem Linea & Meridiana simul & Substylaris est, eadem quoque est Meridiana Æquinoctialis.

Secundò, quòd in Orientalibus & Occidentalibus Erectis, Illa Æquinoctialis Diameter quæ Lineæ Contingenti parallelos jacet, ejusdem est Meridiana.

Tertiò, quòd Arcus Æquinoctialis inter Meridianam ejus, & Substylarem, est Differentia Longitudinis, seu Meridiani, Loci subjecti, & Loci illius in Terra cui Planum istud Horizontale est; Locus autem iste ad easdem Partes Substylaris ubi Meridiana situatur; hoc est, ad Plagam illam cui vergit Declinatio, Orientem scil. vel Occidentem: At si Arcus iste nihil fuerit, idem est utriusque

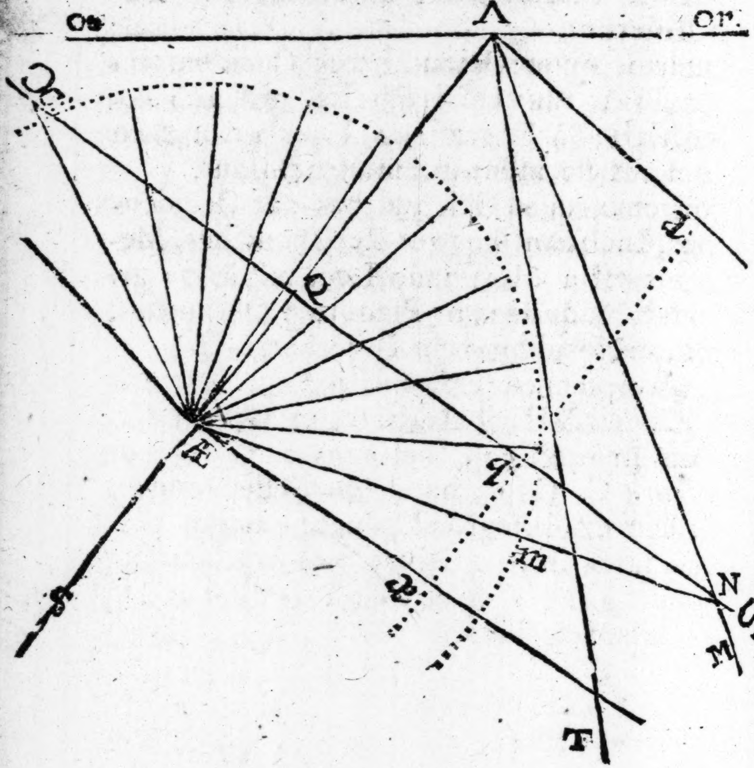
que

que Loci Meridianus, & Latitudine tantum differunt.

Quartò, quod Orientalia & Occidentalia Erecta, Illis ſunt Horizontalia, qui, ſub Æquinoctiali, à Meridiano Loci gr. 90. in Ortum aut Occaſum diſtantes habitant.

Poſtremò, quòd Orientalibus aut Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianus eſt à Meridiano Loci minùs 90 gr. remotus; & quò major Planorum Obliquitas, eò minor Meridianorum Differentia eſt.

5. Accipiemus, Exempli gratia, Sciotericon (*Capitis* VIII[i]) Auſtrale, in Ortum Declinans gr. 42°. 30', Inclinans 24°. 00'; ut in *Figura* C. Cujus haud opus eſſe, opinor, Practicen ex integro deponere, quum perſpicuè ſatis in hoc Capite jam tractata ſit: ſufficiat Lineas ipſas cum ſymbolis ſeu notis ſuis deſcribere.

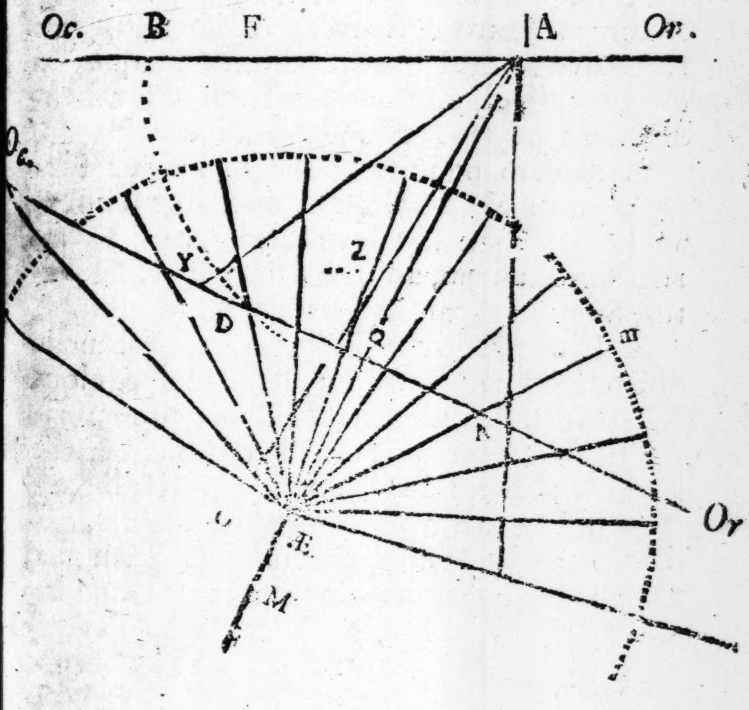


6. In tertio autem Caſu *Capitis* IX; quoniam AM Subſtylaris eſt, & non Linea XIIæ. Meridiana Æquinoctialis peculiari Methodo indagatur, ſecundum hoc Theorema.

Ut Radius. ad Sinum Declinationis, ::
Ita Sinus Complementi Obliquitatis.
Ad Arcum Æquinoctialis, qui eſt diſtantia, Meridianæ Æquinoctialis à Subſtylari verſus plagam Declinationis.

Geome-

Geometricè verò ſic perficitur. Radio AB deſcribatur Arcus BD: & ſuper Lineam Obliquitatis AO, ponatur AZ=AF; &, per punctum Z, ducatur Linea ZY, ipſi AB parallela, & Arcum BD ſecans in Y: jungantur etiam AY: adeoque habetur Angulus BAY: cui Angulus æqualis AÆ*m* ponatur intra Circulum Æquinoctialem. Accipiatur, Exempli gratia, Sciotericon (in 3tio *Caſu* IXi *Capitis*) Auſtrale Declinans in Ortum 42°. 30′. Reclinans 30½.



CAP.

CAP. XI.

Lineas Horarias describere, & propriis quamque numeris notare.

1. QUoniam Linea Contingentiæ *Or.Q. Oc.* unica est Linea utrisque Planis, tum Æquinoctialis tum Scioterici, communis, & in eâ designatos habes Linearum omnium Horariorum Terminos, facillimum erit & ipsas Lineas Horarias ducere.

2. Nam, si Scioterico Centrum fuerit; applicetur Centro A Regula; & per Singulas successive Notas Lineæ producantur; quæ, si opus fuerit, etiam trans Centrum protrahendæ erunt, ut oppositas Horas indicent.

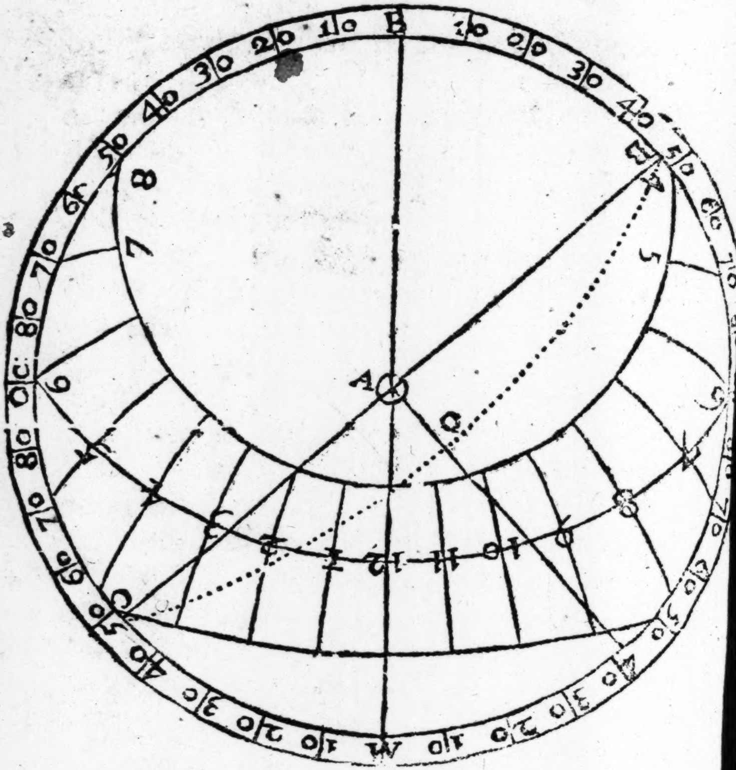
3. Si verò non fuerit Centrum; per Singulas hasce Notas, singulæ ducantur Lineæ, Substylari Parallelæ: quæ Lineæ erunt Horariæ. Stylus autem, ad distantiam Q Æ Elevatus, Substylari parallelis imminebit.

4. Lineæ Horariæ Numeris suis hoc modo distinguendæ sunt. A Meridiana incipe, eique XII affige: & inde cæteris Lineis prout serie suâ jacent, à partibus Occidentalibus asscribe XI,X,IX,VIII,&c. ab Orientalibus, I,II,III,&c.

5. In hoc autem punctum omne tuleris, modò plures Lineas non descripseris, quàm quæ aliquo Anni tempore usu veniant: Quod Instrumento Projectionis Horizontalis invenitur: In quo inscribuntur tantum Meridianus æquinoctialis, Tropicus uterque & quantum è Circulis Horariis inter Tropicos intercipitur:

Cen-

Centro autem affigitur Diameter mobilis BAC, unà cum Radio perpendiculari A 90, in gradus ſuos diviſo; ut in ſchemate videre eſt.



Inſtrumento autem ſic utimur. Gradus Obliquitatis, puncto delebili O, notetur in Radio: quam Gradui Declinationis in Margine affigas, (à Partibus quidem congruis, ſi Planum Inclinet; Oppoſitis verò, ſi Reclinet:) Deinde, per Extremitates utraſque Diametri mobilis, punctumque Obliquitatis O, Arcum Circuli COB ductum

ductum puta: Arcus iſte, à Partibus Convexis, Planum Inclinans repræſentabit; à Concavis autem, Reclinans; Ideoque Horas Plano ritè deſcribendas exhibebit.

Exempli gratiâ. Sit Planum Auſtrale in Ortum Declinans gradus 42°, 30′. Inclinans gradus 24; vel Planum Boreale Declinans in Occaſum 42°, 30′. Reclinans 24°. Applicetur Radius gradui 42°, 30′, inter Ortum & Meridiem; notetur etiam Obliquitas Litera O. Deinde per tria hæc Puncta data, B, O, C, Arcum Circuli occulte ductum puta. Arcus iſte à parte Convexa (hoc eſt, in Auſtrali Inclinanti) ab Exortu Solis uſque ad Primam Pomeridianam Horas indicabit: à Parte autem Concavâ (hoc eſt in Plano Boreali Reclinanti) à Secundâ Pomeridiana ad Occaſum.

Obſervandum eſt Diametrum mobilem Murum aut Planum, Erectum repræſentare, cui Declinatio illa 42°, 30′, contingit.

Et ad hanc Methodum in omnimodis aliis Plani Poſitionibus vel Declinatione vel Obliquitate diverſis hoc Inſtrumento utendũ eſt.

6. Si lineæ alicui Horariæ, ſive Æquinoctialis ſive ipſius Scioterici,non ſit,intra Chartam, *Contingentis* Occurrendæ locus,adeo ut non detur Punctũ Interſectionis cui congruè ducatur Linea:Contingentem utcunq; in puncto *q* ſeca, ductâ Subſtylari parallelâ, quæ datam quoque Lineam Horariam ſecet: Sic Tres Lineæ dantur, ſcilicet ÆQ, Centri Æquinoctialis à Contingente Diſtantia; AQ Centri Scioterici à Contingente Diſtantia; & Parallelæ Segmentũ inter

inter Contingentem & Lineam Æquinoctiali, horariam datam: Ex his Quarta invenitur; nempe Segmentum ejusdem Parallelæ inter Contingentem, Lineamq; Horariam Scioterici quæsitam. Ut in Schemate *Cap.X. Sect.*5.

Æ Q, A Q :: qæ. qa.
Vel A Q, Æ Q :: qa. qæ.

7. Quoniam in Sciotericis fortasse VIII[i] *Capitis*, Punctum S Centro nimis prope incideret, adeo ut Substylaris minus certo duci queat: Angulum CAS è Canone Triangulorum hoc modo invenire potes.

Ut Sinus semi-summæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis;
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis; Ad Tangentem *Arcus Primi.*

Rursus, Ut Sinus semi-summæ, Polaris Altitudinis, & Obliquitatis:
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis; Ad Tangentem *Secundi Arcus.*

Tum, si Altitudo Polaris Obliquitatem excedat Arcuum Differentia æqualis erit Angulo CAS: sin minùs, utrorumque summa.

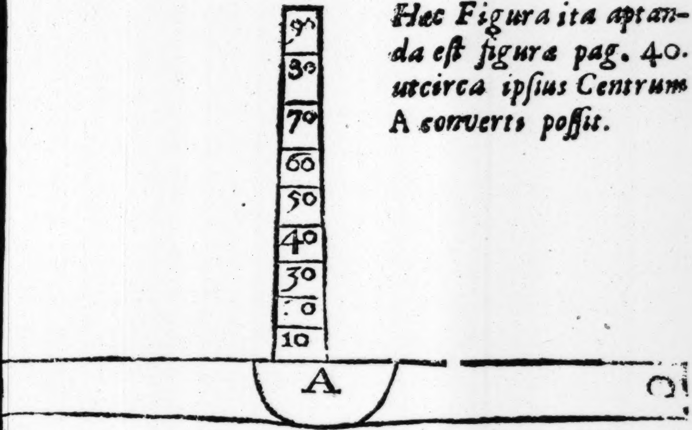
8. In Sciotericis etiam *Capitum* VIII[i] & IX[i], si Angulus CAM pro Meridiano, inventu difficilior fuerit: dicito.

Rad. Sin: Obliquitatis :: Tang: Declin.
Tang: CAM.

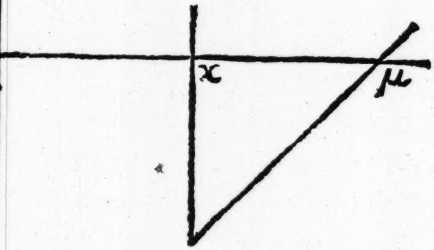
Soli Deo Laus & Gloria.

FINIS.

Hæc Figura ita aptanda est figuræ pag. 40. ut circa ipsius Centrum A converti possit.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ CC, prout dirigitur Cap. IX. Sect. 2.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ AA, Cap. 6. ut lineis similiter notatis directè subsit.